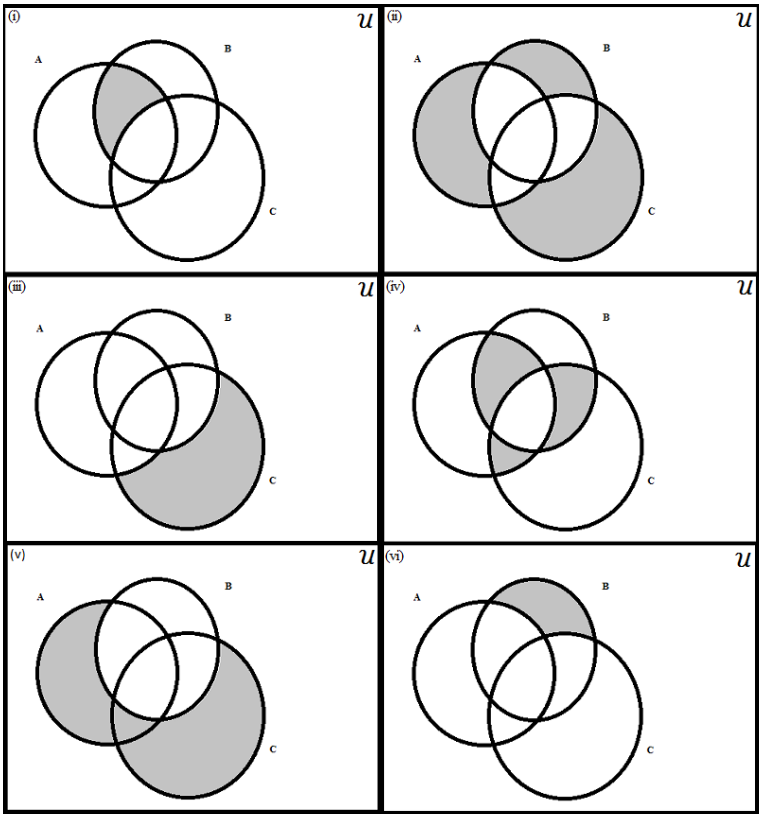
Universidad Nacional de Cuyo – Facultad de ciencias exactas y naturales

Introducción a la matemática 2016

Trabajo práctico 4

1. Represente en un diagrama de Venn los siguientes conjuntos:
   a. $A \cup B$
   b. $A \cap B$
   c. $(A \cup B) \cap C$
   d. A^C
   e. $B^C \cap C$
   f. $D - E$

2. Considere los siguientes diagramas de Venn:



   a. Identifique los conjuntos sombreados en cada diagrama de Venn
   b. Identifique los conjuntos sombreados en cada diagrama de Venn utilizando, al menos una vez, complemento.

3. Dados los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 15\}$$
$$A = \{x \in \mathcal{U}: x\ es\ múltiplo\ de\ 3\}$$
$$B = \{x \in \mathcal{U}: x\ es\ primo\}$$
$$C = \{x \in \mathcal{U}: x\ pertenece\ a\ la\ sucesión\ de\ Fibonacci\}$$

La sucesión de Fibonacci es 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … Es una sucesión infinita de números enteros no negativos, cuyos primeros números son 0 y 1 y los demás elementos de la sucesión se obtienen sumando siempre los últimos dos números de la sucesión.

   a. Definir por extensión los conjuntos $\mathcal{U}$, *A, B* y *C*

b. Definir por extensión los siguientes conjuntos:
   a. $A \cup B$
   b. $A^C \cup B^C$
   c. $A - C$
   d. $A \cup (B \cap C)$
   e. $A^C \cap B$
   f. $(A \cap C) - B$

4. Sean *A*= (-4,8]; *B*=[2,∞); *C*=[-10,5]; *D*=(-4,4). Exprese por comprensión el conjunto que resulte de las siguientes operaciones y grafique en la recta real. Además, si es posible, indique el conjunto en notación de intervalos.
   a. $A \cup D$
   b. $A \cup B$
   c. $(B \cup A) - C$
   d. $A - C$
   e. C^C
   f. B^C

5. Lea el siguiente problema. Realice un diagrama de Venn para representar la situación y responda.
   En una prueba de ingreso a una universidad se presentaron 100 alumnos, de los cuales 65 aprobaron el examen de matemática, 25 el de matemática y física, y 15 aprobaron solo el examen de física.

   a. ¿Cuántos no aprobaron ninguno de los exámenes mencionados?
   b. ¿Cuántos alumnos aprobaron física?
   c. ¿Cuántos alumnos aprobaron sólo matemática?

6. Sean *A*={1,2,3,4,5} y *B*={1,3,5,7,9}.

   a. Defina por extensión $A \times B$
   b. Defina por extensión $C = \{(x,y) \in A \times B : x = y\}$
   c. Defina por extensión $D = \{(x,y) \in A \times B : y = x^2\}$
   d. Defina por extensión $E = \{(x,y) \in A \times B : x < y \leq x + 3\}$
   e. Defina por extensión $F = \{(x,y) \in A \times B : y = 2x\}$

7. Representen gráficamente los siguientes conjuntos:

   a. $[0,1] \times (2,4]$
   b. $[0,3) \times ([-1,1] \cup (2,3))$
   c. $\{0,4,7\} \times \{1,2,3,4\}$
   d. $\{1,2,3\} \times [0,4]$
   e. $((1,3) \cup \{4,5\}) \times (0,1]$
   f. $([2,5) \times (3,6)) \cap ([3,7] \times (2,4])$

8. Sea *X* un conjunto de referencia y sean *A, B, C* subconjuntos de *X*. Demuestre:

   a. $A \cap B \subseteq A$
   b. $A \subseteq A \cup B$
   c. Si $A \subseteq B$ entonces $B^C \subseteq A^C$
   d. Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$

Ejercicios adicionales propuestos

1. Dados los siguientes conjuntos:

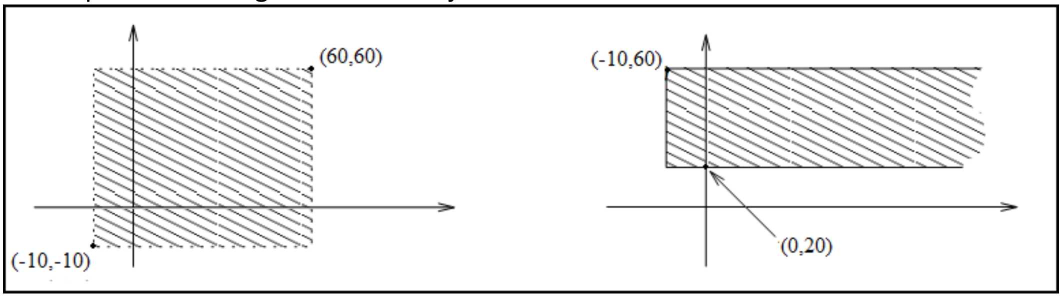
   $A = \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}$
   $B = \{y \in \mathbb{R}: y \ \geq 1\}$
   $C = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}: m\ es\ par\ y\ n^2 = 1\ \}$
   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1\}$
   $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0\}$

   Represente gráficamente.

   a. $A \times B$
   b. C
   c. $D \cup E$

2. En base a los conjuntos del ejercicio anterior. Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   a. $(2,3) \in A \times B$
   b. $(3,2) \in A \times B$
   c. Siendo $x > 20, (x, 100) \in A \times B$
   d. $(0,1) \in C$
   e. $(6, -1) \in C$
   f. $\{(100,1), (-1,1)\} \subset C$
   g. $(3, -\frac{1}{2}) \in D \cup E$
   h. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 2 \leq x < \pi, -1 < y < 0\} \subset D \cup E$

3. Defina por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



4. Utilizando las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la unión y la intersección, las leyes de De Morgan, compruebe las siguientes identidades. Ilustre cada caso con un diagrama de Venn. Recuerde que $A - B = A \cap B^C$.

   a. $(A^C \cap B)^C = A \cup B^C$
   b. $A \cap (B \cup A)^C = \emptyset$
   c. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   d. $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$
   e. $(A \cup B) \cap (A \cup B^C) = A$

5. Simplifique la expresión de modo que *A, B* y *C* aparezcan a lo sumo una vez:

   a. $\left((A^C \cup C^C) \cap B\right)^C \cup (A \cup (C \cap B)^C \cup C)^C$
   b. $(A \cup (B \cup C)^C)^C \cap (A^C \cup (B \cap C)^C)^C$

6. Sean $S = \{0,1,2,3,4\}$ y$T = \{0,2,4\}$

   a. ¿Cuántos pares ordenados hay en $S \times T$? ¿Y en $T \times S$?
   b. Listar los elementos de:

a. $A = \{(m,n) \in S \times T : m < n\}$
b. $B = \{(m,n) \in T \times S : m < n\}$
c. $C = \{(m,n) \in S \times T : m + n \geq 3\}$
d. $D = \{(m,n) \in S \times T : m.n \geq 4\}$
e. $E = \{(m,n) \in S \times T : m + n = 10\}$

7. Realice un diagrama de Venn para representar el siguiente problema y responda.
De un total de 60 alumnos de un colegio: 15 estudian francés solamente, 11 estudian francés e inglés, 12 estudian alemán solamente, 8 estudian francés y alemán, 10 estudian inglés solamente, 5 estudian inglés y alemán y 3 estudian los tres idiomas.

a. ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
b. ¿Cuántos alumnos estudian alemán?
c. ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?
d. ¿Cuántos estudian francés?

8. Considerar los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 4\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 9\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$$

Describir y graficar los siguientes conjuntos:
a. $A \cap B$
b. $A \cap C$
c. $B \cap C$
d. $A^C \cup C^C$