Trabajo práctico 4

1. Represente a través de diagramas de Venn cada uno de los siguientes conjuntos.

   a. $\boldsymbol{A \cup B}$

   b. $\boldsymbol{A \cap B}$

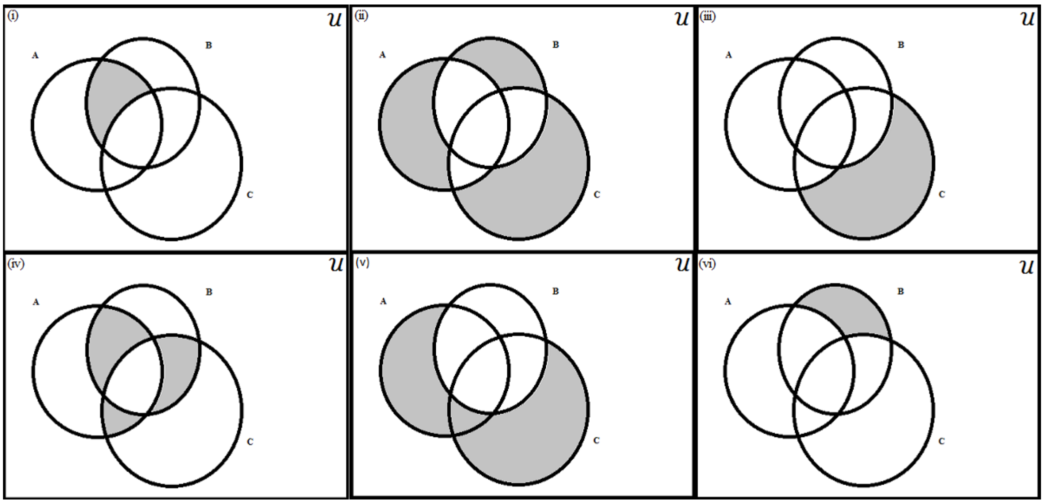
   c. $(\boldsymbol{A \cup B}) \cap \boldsymbol{C}$

   d. $\boldsymbol{A^C}$

   e. $\boldsymbol{B^C \cap C}$

   f. $\boldsymbol{D - E}$

2. Dados los conjuntos representados en los siguientes diagramas de Venn,



   a. Identifique los conjuntos sombreados en cada diagrama de Venn.

   b. Identifique los conjuntos sombreados en cada diagrama de Venn utilizando, al menos una vez, complemento.

3. Dados los siguientes conjuntos:

$$\boldsymbol{\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 15\}}$$

$$\boldsymbol{A = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ es múltiplo de } 3\}}$$

$$\boldsymbol{B = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ es primo}\}}$$

$$\boldsymbol{C = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ pertenece a la sucesión de Fibonacci}\}}$$

La sucesión de Fibonacci es 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … Es una sucesión infinita de números enteros no negativos, cuyos primeros números son 0 y 1 y los demás elementos de la sucesión, se obtienen sumando siempre los últimos dos números de la sucesión.

   a. Definacada uno de ellos.

   b. Defina por extensión los siguientes conjuntos:

   $\rightarrow \boldsymbol{A \cup B}$

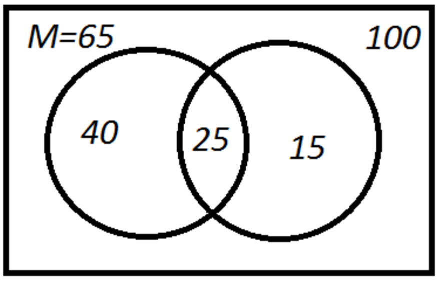
- $\rightarrow \boldsymbol{A^C} \cup \boldsymbol{B^C}$
- $\rightarrow \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}$
- $\rightarrow \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$
- $\rightarrow \boldsymbol{A^C} \cap \boldsymbol{B}$
- $\rightarrow (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{B}$

4. Sean *A*=(-4,8]; *B*=[2,∞); *C*=[-10,5]; *D*=(-4,4). Exprese por comprensión el conjunto que resulte de las siguientes operaciones y grafique en la recta real. Además, si es posible, indique el conjunto en notación de intervalos.

   - $\rightarrow A \cup D$
   - $\rightarrow \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
   - $\rightarrow (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{C}$
   - $\rightarrow \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}$
   - $\rightarrow \boldsymbol{C^C}$
   - $\rightarrow \boldsymbol{B^C}$

5. Lea el siguiente problema. Realice un diagrama de Venn para representar la situación y responda.

   En una prueba de ingreso a una universidad se presentaron 100 alumnos, de los cuales 65 aprobaron el examen de matemática, 25 el de matemática y física, y 15 aprobaron solo el examen de física.



   a. ¿Cuántos no aprobaron ninguno de los exámenes mencionados?

   b. ¿Cuántos alumnos aprobaron física?

   c. ¿Cuántos alumnos aprobaron sólo matemática?

6. Sean*A*={1,2,3,4,5} y *B*={1,3,5,7,9}.

   a. Defina por extensión $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

   b. Defina por extensión$\boldsymbol{C} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$

   c. Defina por extensión$\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x^2}\}$

   d. Defina porextensión$\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{x} < y \leq x + 3\}$

   e. Defina por extensión$\boldsymbol{F} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{2x}\}$

Trabajo práctico 4

7. Representen gráficamente los siguientes conjuntos:

   a. $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \times (\mathbf{2},\mathbf{4}]$
   b. $[\mathbf{0},\mathbf{3}) \times ([-\mathbf{1},\mathbf{1}] \cup (\mathbf{2},\mathbf{3}))$
   c. $\{\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{7}\} \times \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$
   d. $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\} \times [\mathbf{0},\mathbf{4}]$
   e. $((\mathbf{1},\mathbf{3}) \cup \{\mathbf{4},\mathbf{5}\}) \times (\mathbf{0},\mathbf{1}]$
   f. $([\mathbf{2},\mathbf{5}) \times (\mathbf{3},\mathbf{6})) \cap ([\mathbf{3},\mathbf{7}] \times (\mathbf{2},\mathbf{4}])$

8. Sea *X* un conjunto de referencia y sean *A, B, C* subconjuntos de *X*. Demuestre:

   a. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$
   b. $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
   c. Si $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ entonces $\boldsymbol{B^C} \subseteq \boldsymbol{A^C}$
   d. Si$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$entonces $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$

9. Siendo que $A = \{x \in R | x^2 - 1 = 0\}$ y $B = \{x \in R | |x| \leq 1\}$, obtenga $A \cap B$ y $(A \cup B)^C$

10. Sea *U* un conjunto de referencia y sean *A, B, C* subconjuntos de *U*. Demuestre:

a. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A^C} = \boldsymbol{B^C}$.
b. $(A^C)^C = A$.
c. $A \subseteq B \Rightarrow B^C \subseteq A^C$.
d. $A \cap A = A$.
e. $A \cup A = A$.
f. $A \cap B = B \cap A$.
g. $A \cup B = B \cup A$.
h. $A \cup U = U$.
i. $A \cup \emptyset = A$.
j. $A \subset \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$
k. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
l. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
m. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
n. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Trabajo práctico 4

o. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

p. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

q. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Trabajo práctico 4

Ejercicios adicionales propuestos

1. Dados los siguientes conjuntos:

$$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} > 2\}$$
$$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{y} \geq \mathbf{1}\}$$
$$\boldsymbol{C} = \left\{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}: \boldsymbol{m}\ \boldsymbol{es}\ \boldsymbol{par}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{n}^2 = \mathbf{1}\right\}$$
$$\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{\pi}, -\mathbf{1} \leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}\}$$
$$\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: \mathbf{2} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{5}, -\mathbf{3} \leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{0}\}$$

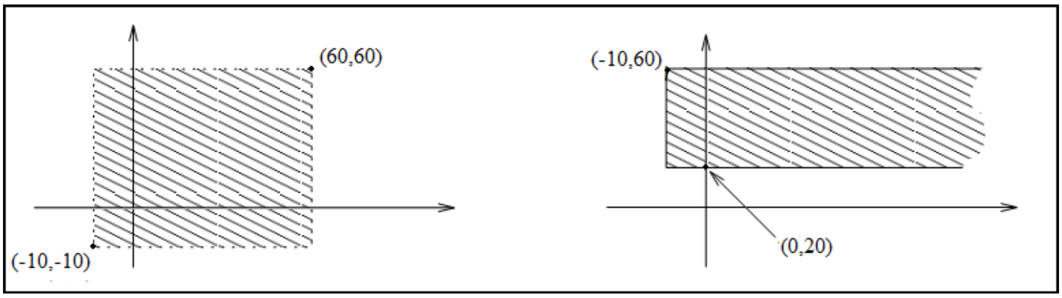
a. Represente gráficamente.

- $\rightarrow$ $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$
- $\rightarrow$ $\boldsymbol{C}$
- $\rightarrow$ $\boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{E}$

b. Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- $\rightarrow$ $(2,3) \in A \times B$
- $\rightarrow$ $(3,2) \in A \times B$
- $\rightarrow$ Siendo $\boldsymbol{x} > 20, (x, 100) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$
- $\rightarrow$ $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \in \boldsymbol{C}$
- $\rightarrow$ $(\mathbf{6}, -\mathbf{1}) \in \boldsymbol{C}$
- $\rightarrow$ $\{(\mathbf{100}, \mathbf{1}), (-\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \subset \boldsymbol{C}$
- $\rightarrow$ $(\mathbf{3}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}) \in \boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{E}$
- $\rightarrow$ $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: \mathbf{2} \leq \boldsymbol{x} < \pi, -1 < y < 0\} \subset D \cup E$

2. Defina por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



3. Utilizando las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la unión y la intersección, las leyes de De Morgan, compruebe las siguientes identidades. Ilustre cadacaso con un diagrama de Venn. Recuerde que $A - B = A \cap B^C$.

a. $(A \cup B) \cap (A \cup B^C) = A$

b. $(A^C \cap B)^C = A \cup B^C$

Trabajo práctico 4

c. $A \cap (B \cup A)^C = \emptyset$

d. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

e. $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

4. Simplifique la expresión de modo que *A, B* y *C* aparezcan a lo sumo una vez:

   a. $\left((\boldsymbol{A}^C \cup \boldsymbol{C}^C) \cap \boldsymbol{B}\right)^C \cup \left(\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{B})^C \cup \boldsymbol{C}\right)^C$

   b. $\left(\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})^C\right)^C \cap \left(\boldsymbol{A}^C \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})^C\right)^C$

5. Sean $S = \{0,1,2,3,4\}$ y $T = \{0,2,4\}$

   a. Determine la cantidad de pares ordenados que tiene $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}$, y los que tiene $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S}$.

   b. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:

   $\rightarrow$ $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m} < n\}$

   $\rightarrow$ $\boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S} : \boldsymbol{m} < n\}$

   $\rightarrow$ $\boldsymbol{C} = \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}\}$

   $\rightarrow$ $\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m}.\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{4}\}$

   $\rightarrow$ $\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{10}\}$

6. Realice un diagrama de Venn para representar el siguiente problema y responda.

   De un total de 60 alumnos de un colegio: 15 estudian francés solamente, 11 estudian francés e inglés, 12 estudian alemán solamente, 8 estudian francés y alemán, 10 estudian inglés solamente, 5 estudian inglés y alemán y 3 estudian los tres idiomas.

   a. ¿Cuántos no estudian ningún idioma?

   b. ¿Cuántos alumnos estudian alemán?

   c. ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?

   d. ¿Cuántos estudian francés?

7. A partir de los siguientes conjuntos:

   $\boldsymbol{A} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{2x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{4}\right\}$

   $\boldsymbol{B} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{3y} = \boldsymbol{9}\right\}$

   $\boldsymbol{C} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{2x}\right\}$

   Describa y grafique $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ y $A^C \cup C^C$