
TRABAJO PRÁCTICO 7: PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Utilice inducción matemática para demostrar que las siguientes relaciones se cumplen (o no) para todo $n \in \mathbb{N}_k$ iniciado desde cierto $k \in \mathbb{N}$. Determinar el valor de k .

1. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
5. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$
6. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n = \frac{(-1)^{n-1}}{2}$
7. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$
8. $2^n < n!$
9. $2n + 1 \leq 2^n$
10. $2^{n-3} \geq n - 2$
11. $3n + 25 < 3^n$
12. $n^2 + n$ es par.
13. $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6
14. $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ es divisible por 9.
15. $n + (n + 1) + (n + 2)$ es divisible por 6.
16. $2^{2n} - 1$ es divisible por 3
17. $|\text{sen}(nx)| \leq n|\text{sen}(x)|$
18. Sea $f_0 = 0, f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para $n \geq 0$ (sucesión de Fibonacci). Entonces:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Ejercicios “desafío” adicionales

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n} \forall m, n \in \mathbb{N}$

2. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

3. $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

4. $n < \frac{n^2-n}{12} + 2$

5. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$

6. Utilice inducción matemática para demostrar que el número de diagonales de un n-polígono convexo es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.

7. $\sum_{k=1}^n \cos(2^k \theta) = \cos(\theta) \cdot \cos(2\theta) \cdot \cos(4\theta) \dots \cos(2^n \theta) = \frac{\text{sen}(2^{n+1}\theta)}{2^{n+1}\text{sen}(\theta)}, \text{sen}(\theta) \neq 0$

8. $\sum_{k=1}^n \cos[(2k-1)\theta] = \frac{\text{sen}(2n\theta)}{2\text{sen}(\theta)}, n \geq 1, \text{sen}(\theta) \neq 0$

9. Empleando la definición de la sucesión de Fibonacci (ejercicio 18), demostrar que para todo entero $n \geq 1, F_n < 2^n$.