TRABAJO PRÁCTICO 7: PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Utilice inducción matemática para demostrar que las siguientes relaciones se cumplen (o no) para todo $n \in \mathbb{N}_k$ iniciado desde cierto $k \in \mathbb{N}$. Determinar el valor de k.

1. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1)$
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
5. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
6. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
7. $2^n < n!$
8. $2n + 1 \leq 2^n$
9. $2^{n-3} \geq n - 2$
10. $3n + 25 < 3^n$
11. $n^2 + n$ es par.
12. $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6
13. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9.
14. $n + (n+1) + (n+2)$ es divisible por 6.
15. $2^{2n} - 1$ es divisible por 3
16. $|sen(nx)| \leq n|sen(x)|$
17. Sea $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para $n \geq 0$ (sucesión de Fibonacci). Entonces:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Ejercicios "desafío" adicionales

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n} \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$
2. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
3. Utilice inducción matemática para demostrar que el número de diagonales de un n-polígono convexo es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.
4. $\sum_{k=1}^{n} \cos[(2k-1)\theta] = \frac{sen\,(2n\theta)}{2sen\,(\theta)}$, $n \geq 1, sen(\theta) \neq 0$
5. Empleando la definición de sucesión de Fibonacci (ejercicio 18), probar que $F_n < 2^n$, para todo entero $n \geq 1$.