

Trabajo Práctico N°3: Derivadas

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I incorpore el proceso de derivación, tanto a través del aprendizaje y aplicación de la definición de derivada empleando el concepto de límite, como mediante el uso de métodos y reglas para encontrar derivadas de funciones. Que la aplicación de dichas reglas le permita entender conceptos como la velocidad y la aceleración. Que comprenda la relación entre derivabilidad y continuidad. Que aprenda a aplicar: derivación sucesiva a funciones con derivadas continuas, la regla de la cadena para calcular derivadas de funciones compuestas y derivación implícita para funciones en las cuales no resulta sencillo expresar a y en función de x .

NOTA AL ESTUDIANTE: los ejercicios destacados “en negrita” son aquellos a desarrollar por el docente en las clases prácticas. El resto de los ejercicios, como así también los propuestos como extra-áulicos deben ser resueltos en forma completa por el estudiante. Las dudas pueden ser consultadas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta. Se recomienda, además, disponer de alguna herramienta que permita comparar los resultados obtenidos en el desarrollo “manual” de cada ejercicio.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

DERIVADA POR DEFINICIÓN

1. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición (a través del proceso de límite)

a. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$

b. $f(x) = 2 - x^2$

c. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

d. $f(x) = \sqrt{x+4}$

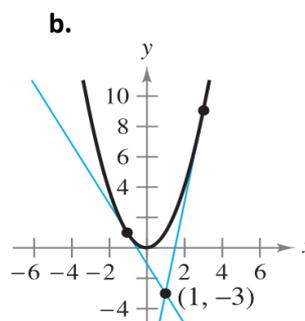
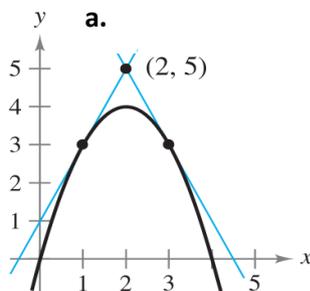
e. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

RECTAS TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

2. En los incisos a y b, encontrar las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto señalado

a. $f(x) = 4x - x^2$

b. $f(x) = x^2$



3. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x + \frac{4}{x}$ en el punto (2,4). Grafique la curva y la tangente en el mismo par de ejes coordenados.

4. Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

5. Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto (2, -3). Grafique la parábola y la recta normal.

6. Escriba una ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{2x}{x+1}$ en el punto (1,1).

7. Determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal

a. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

b. $y = x^3 + x$

c. $y = \frac{1}{x^2}$

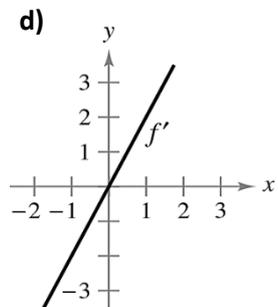
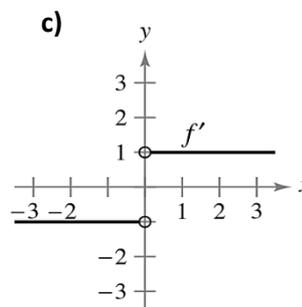
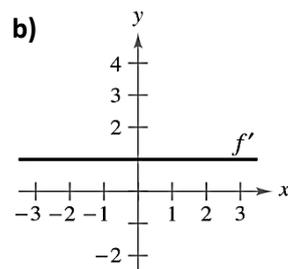
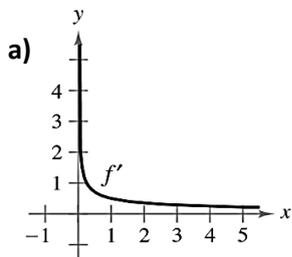
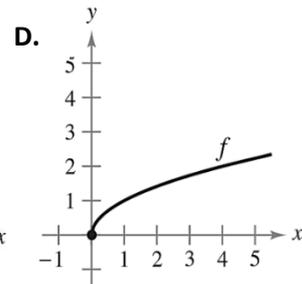
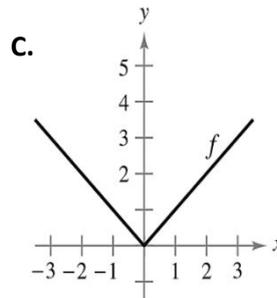
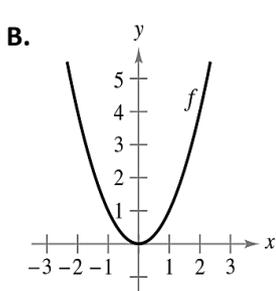
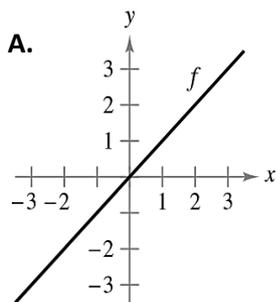
d. $y = x^2 + 9$

e. $y = x + \text{sen}x, 0 \leq x \leq 2\pi$

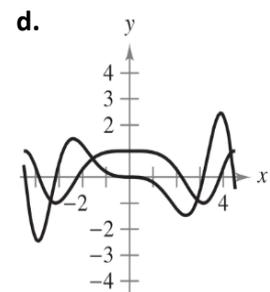
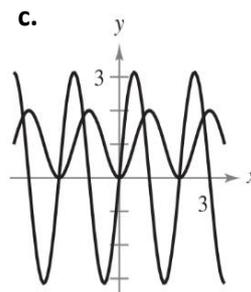
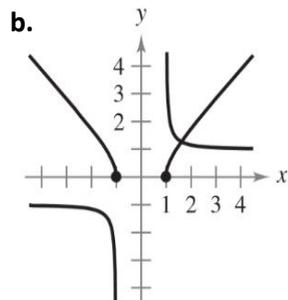
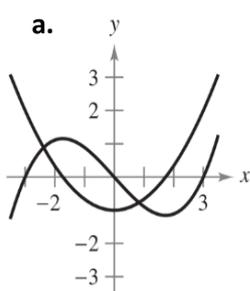
f. $y = \sqrt{3}x + 2\cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$

ANÁLISIS DE DERIVADAS DE FUNCIÓN MEDIANTE GRÁFICAS

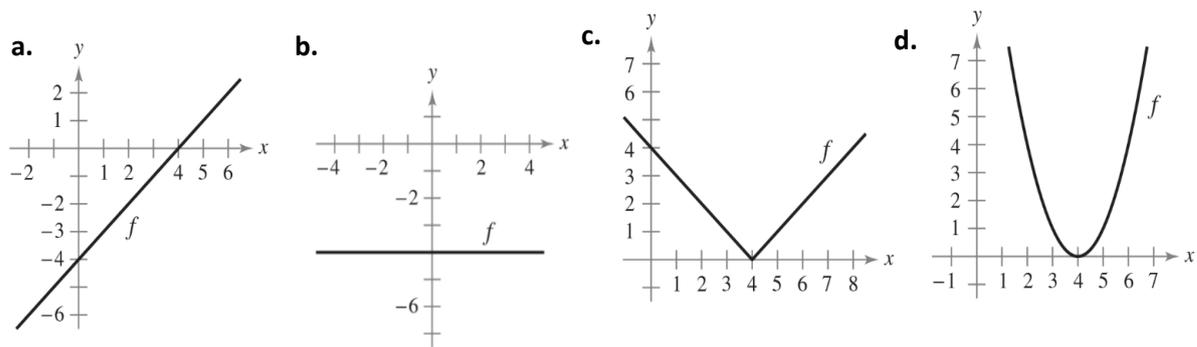
8. En los siguientes incisos se muestra la gráfica de f . Seleccionar la gráfica de f' .



9. A continuación, se muestran las gráficas de una función f y su derivada f' . Clasificar las gráficas según correspondan a f o f' y explicar los criterios usados para tal selección

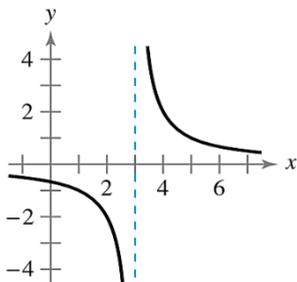


10. A partir de las gráficas de f construir las de f' en cada caso, y explicar cómo se obtuvo la respuesta.

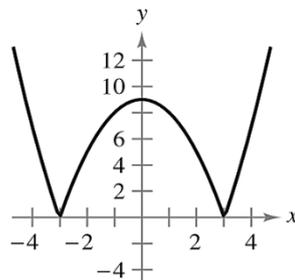


11. Para las siguientes funciones y sus gráficas, describir los valores x para los que f es derivable. Obtener la derivada de la función.

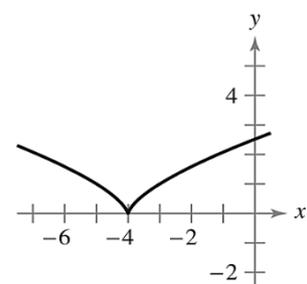
a. $f(x) = \frac{2}{x-3}$



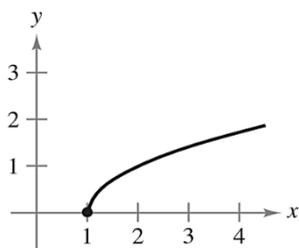
b. $f(x) = |x^2 - 9|$



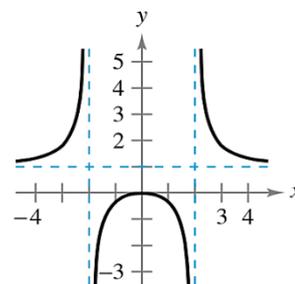
c. $f(x) = (x+4)^{2/3}$



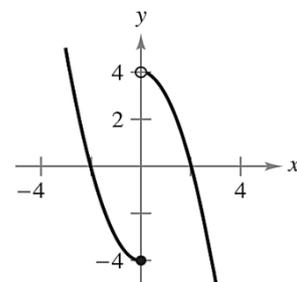
d. $f(x) = \sqrt{x-1}$



e. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$



f. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



DERIVADAS LATERALES, DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

12. Calcular las derivadas laterales en $x = 1$ para cada una de las siguientes funciones. ¿Es derivable la función en $x = 1$?

a. $f(x) = |x - 1|$

b. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

c. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

13. En cada caso, determinar si la función es derivable en $x = 2$.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \geq 2 \end{cases}$

14. Decidir en qué puntos son derivables las siguientes funciones:

$$a. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 7 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b. f(x) = \begin{cases} 1 + 4x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 < x < 5 \\ 5x - 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

15. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

¿La función es continua en $x = 0$? ¿Es derivable en $x = 0$? Justificar

16. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ \tan x, & 0 \leq x \leq \pi/4 \end{cases}$

¿La función es continua en $x = 0$? ¿Es derivable en $x = 0$? Justificar

17. ¿Para qué valor o valores de la constante m , si existen, la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen}2x, & x \leq 0 \\ mx, & x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$? ¿Es derivable en $x = 0$? Justificar

REGLAS DE DERIVACIÓN

18. Derive la función f respecto de x o respecto de t , según corresponda:

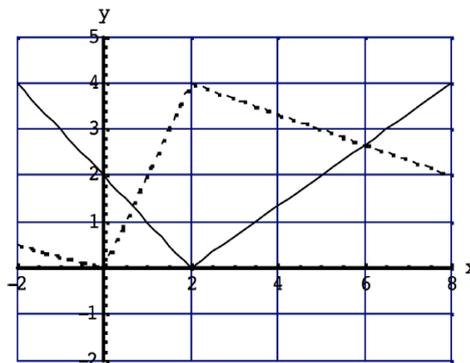
a. $y = x^2 \cdot e^x$ b. $y = \frac{e^x}{x^2}$ c. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ d. $f(t) = \frac{4t+5}{2-3t}$ e. $f(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$

19. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores de:

a. $(fg)'(5)$ b. $\left(\frac{f}{g}\right)'(5)$ c. $\left(\frac{g}{f}\right)'(5)$

20. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

21. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación, siendo f la gráfica representada con línea sólida y g la representada con línea de puntos. Sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Encuentre $u'(1)$ y $v'(5)$.



22. Emplear las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función en cada caso

a. $y = \frac{1}{x^5}$ b. $y = \sqrt[5]{x}$ c. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$ d. $f(t) = t^3 \cos(t)$

e. $f(\theta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$	f. $f(x) = \frac{5}{(2x)^3} + 2\cos x$	g. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$
h. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$	i. $f(x) = x(x^2 + 1)$	j. $f(x) = 3x(6x - 5x^2)$
k. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$	l. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3\cos x$	m. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5\cos x$
n. $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$	o. $f(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$	p. $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$
q. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$	r. $f(t) = \frac{t^2 + 4}{5t - 3}$	s. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$
t. $f(s) = \frac{s}{\sqrt{s} - 1}$	u. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$	v. $f(t) = \frac{\cos t}{t^3}$

23. En los siguientes ejercicios verificar que $f'(x) = g'(x)$, explicar la relación que existe entre f y g

a. $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ $g(x) = \frac{5x+4}{x+2}$

b. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - 3x}{x}$ $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x + 2x}{x}$

REGLA DE LA CADENA

24. Derive aplicando la regla de la cadena:

a. $h(x) = (x^2 + 4x + 6)^5$	b. $h(x) = \cos(\tan(x))$	c. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$	e. $f(x) = \cos(a^3 + x^3)$	f. $h(t) = \left(\frac{t-6}{t+7}\right)^3$
g. $f(x) = e^{x \cos(x)}$	h. $h(x) = \frac{1 + \sqrt{\operatorname{sen}(3x)}}{1 - x + x^5}$	i. $f(x) = \cos(x \operatorname{sen}(x))$
j. $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$	k. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$	l. $f(x) = \ln(2 - x)$
m. $f(x) = \ln(\cos(x))$	n. $f(x) = \cos(\ln(x))$	o. $f(x) = e^x \ln(x)$

25. Suponga $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6) = 7$. Halle $F'(3)$.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

26. Dada la ecuación $xy + 2x + 3x^2 = 4$:

- Encuentre y' por derivación implícita
- Resuelva la ecuación en forma explícita para y , y luego derive para obtener y' en términos de x .
- Compruebe que sus soluciones para los incisos (a) y (b) son consistentes, sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

27. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita siendo $y = f(x)$.

a. $x^2 + y^2 = 1$ b. $x^2y + xy^2 = 3x$ c. $4 \cos(x) \operatorname{sen}(y) = 1$

28. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $\left(-5, \frac{9}{4}\right)$

29. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita:

- | | | | |
|-------------------------------|--|--|---|
| a. $x^2 + y^2 = 9$ | b. $x^2 - y^2 = 25$ | c. $x^{1/2} - y^{1/2} = 16$ | d. $x^3 - y^3 = 64$ |
| e. $x^3 - xy + y^2 = 7$ | f. $x^2y - y^2x = -2$ | g. $x^3y^3 - y = x$ | h. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$ |
| i. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$ | j. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ | k. $(\operatorname{sen} \pi x + \operatorname{cos} \pi y)^2 = 2$ | l. $\operatorname{sen} x = x(1 + \tan y)$ |
| m. $\cot y = x - y$ | n. $\operatorname{sen} x + 2\operatorname{cos} 2y = 1$ | o. $y = \operatorname{sen} xy$ | p. $x = \operatorname{sec}(1/y)$ |

30. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado

- | | | |
|----------------------------------|---|---|
| a. $xy = 6, (-6,-1)$ | b. $x^2 - y^3 = 0, (1,1)$ | c. $y^2 = \frac{x^2-49}{x^2+49}, (7,0)$ |
| d. $(x+y)^3 = x^3 + y^3, (-1,1)$ | e. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5, (8,1)$ | f. $x^3 + y^3 = 6xy + 1, (2,3)$ |
| g. $\tan(x+y) = x, (0,0)$ | h. $x \cdot \operatorname{cos} y = 1, (2, \pi/3)$ | |

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

31. Encontrar la derivada segunda de las siguientes funciones

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| a. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$ | b. $f(x) = x + 32x^{-2}$ | c. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ |
| d. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$ | e. $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x)$ | f. $f(x) = \operatorname{sec}(x)$ |
| g. $f(\theta) = \operatorname{cos}(2\theta)$ | | |

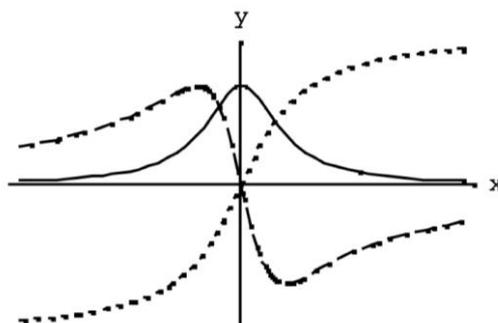
32. Determine la derivada tercera de $y = \sqrt{2x+3}$

33. Si $f(x) = (2-3x)^{-\frac{1}{2}}$, determine $f(0), f'(0), f''(0)$ y $f'''(0)$.

34. Calcule la derivada segunda de $x^3 + y^3 = 1$ mediante derivación implícita.

35. Encuentre y' e y'' de: $y = x \cdot \ln(x)$

36. La figura que se presenta a continuación muestra las gráficas de f, f' , y f'' . Identifique cada curva y explique sus elecciones.



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

37. Una partícula se mueve según la ley de movimientos $= f(t) = t^2 - 10t + 12, t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

- a. Encuentre la velocidad en el instante t .
- b. Indique la velocidad después de 3 s.
- c. ¿Cuándo la partícula está en reposo?
- d. ¿Cuándo se mueve hacia adelante?
- e. Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
- f. Grafique el movimiento de la partícula.

38. La función de posición de una partícula está dada por $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 7t$, siendo $t \geq 0$. ¿En qué instante alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?

39. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada. Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8 \text{ sen}(t)$, donde t está en segundos y x en centímetros.

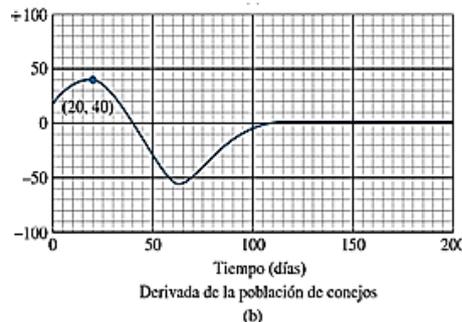
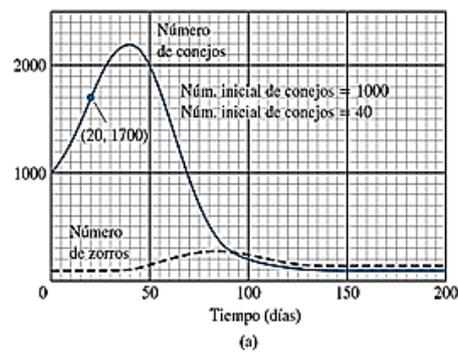
- a. Encuentre la velocidad en el instante t .
- b. Halle la posición y la velocidad de la masa en el instante $t = 2\pi/3$ ¿En qué dirección se mueve en ese instante?

40. Una partícula se mueve de acuerdo con una ley de movimiento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, $t \geq 0$, donde t está dado en segundos y s en metros.

- a. Encuentre la aceleración en el tiempo t y después de 3 s.
- b. Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$.
- c. ¿Cuándo aumenta la partícula su velocidad? ¿Cuándo la reduce?

41. La Ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Utilizar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

42. Las gráficas que se muestran a continuación representan los números de conejos y zorros en una pequeña población del Ártico, los cuales se grafican como funciones del tiempo para 200 días. En el gráfico a) se muestra que, en un principio, el número de conejos aumenta conforme éstos se reproducen. Pero los zorros se alimentan de conejos, de manera que cuando el número de zorros aumenta, la población de conejos se estabiliza y luego declina. En el b) presenta la gráfica de la derivada de la población de conejos.



Responder:

- ¿Cuál es el valor de la derivada de la población de conejos cuando el número de éstos es máximo? ¿Y cuándo se registra el mínimo número de conejos?
- ¿Cuál es el tamaño de la población de conejos cuando su derivada es la mayor posible? ¿Y cuándo es la menor posible (negativa)?
- ¿En qué unidades deben medirse las pendientes de las curvas de población de conejos y de zorros?

43. Cuando un bactericida se agregó a un cultivo de nutrientes en el que las bacterias crecían, la población de bacterias continuó su crecimiento por un tiempo, pero luego dejó de crecer y empezó a disminuir. El tamaño de la población en el tiempo t (horas) fue $B(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Calcular el valor de t a partir del cual la población de bacterias comienza a disminuir.

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

44. Aplique derivación logarítmica para hallar la derivada de y en cada caso:

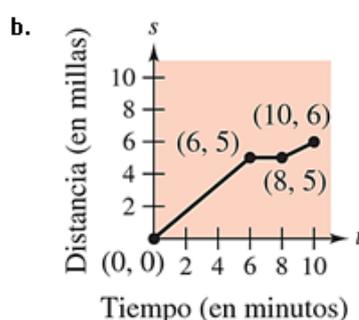
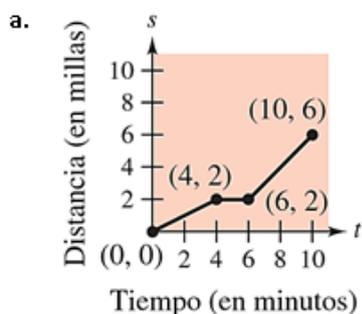
a. $y = x^x$ siendo $x > 0$

b. $y = x^{\text{sen}(x)}$ siendo $x > 0$

c. $y = (\ln x)^{\cos(x)}$ siendo $x \geq 1$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

45. A continuación, se muestra la gráfica de una función posición, que representa la distancia recorrida en millas por una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un bosquejo de la función velocidad correspondiente.



46. Decidir en qué puntos es derivable la siguiente función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{4}x^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

47. Encontrar la derivada de las siguientes funciones

a. $f(x) = \frac{x^3 + 5x + 3}{x^2 - 1}$

b. $f(x) = x^4 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)$

c. $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$

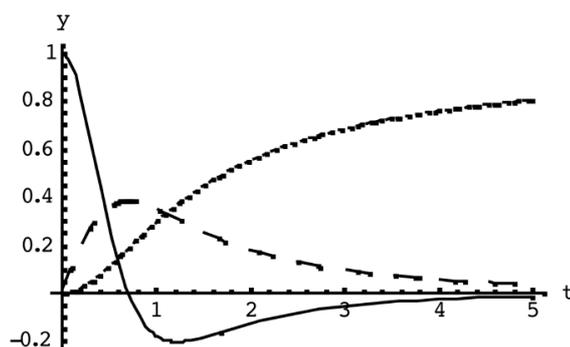
e. $f(x) = \frac{x^2 + c^2}{x^2 - c^2}$, c es una constante.

f. $f(x) = \frac{3(1 - \text{sen } x)}{2 \cos x}$

g. $f(x) = \frac{2-1/x}{x-3}$

f. $f(\theta) = 5\theta \sec \theta + \theta \tan \theta$

48. Use la regla de la cadena para demostrar lo siguiente:
- La derivada de una función par es una función impar.
 - La derivada de una función impar es una función par.
49. Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ en (1,2). Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.
50. Utilizar derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ en (3,-2). Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.
51. **Búsqueda de un patrón:** sea $f(x) = \text{sen}(\beta x)$, donde β es una constante.
- Calcular las 4 primeras derivadas de la función.
 - Verificar que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.
 - Utilizar los resultados del apartado (a) para desarrollar fórmulas generales para las derivadas de orden par e impar: $f^{2k}(x)$ y $f^{2k-1}(x)$.
52. La figura que sigue presenta las gráficas de tres funciones: posición, velocidad y aceleración de un automóvil. Identifique cada curva y explique su elección.



53. Use la definición de derivada para probar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

54. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.
55. La curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre una ecuación para la recta tangente a esa curva en el punto $(-1, \frac{1}{2})$.
56. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \tan(x)$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, 1)$.
57. Halle todos los puntos de la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2 \text{sen}(x) + \text{sen}^2(x)$, donde la recta tangente es horizontal.
58. Sea f una función dada por $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

¿Es f derivable en el valor 1? Confeccione las gráficas de f y f' .

59. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

¿La función es continua en $x = 1$? ¿Es derivable en $x = 1$? Justificar

60. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena

a. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$

b. $y = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$

c. $f(t) = \left(\frac{1}{t-3}\right)^2$

d. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

e. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

f. $f(v) = \left(\frac{1-2v}{1+v}\right)^3$

g. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$

h. $g(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$

i. $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

j. $f(t) = \sqrt{\sqrt{t+1} + 1}$

k. $y = \text{sen}(\pi x)^2$

l. $y = \cos(1 - 2x)^2$

m. $f(x) = \text{sen } 2x \cos 2x$

n. $f(v) = \frac{\cos v}{\text{cosec } v}$

o. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$

p. $h(t) = 2 \cot^2(\pi t + 2)$

q. $y = \text{sen } \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\text{sen } x}$

r. $y = \text{sen}(\tan 2x)$

s. $y = \cos \sqrt{\text{sen}(\tan \pi x)}$

61. Halle la derivada de la función f en cada caso. Simplifique donde se pueda.

a. $f(x) = \arcsen(x^2)$

b. $f(x) = \text{arctang}(e^x)$

c. $y = [\text{sen}(2x^2 - 1)]^{\frac{1}{x}}$

62. Demuestre que las curvas $2x^2 + y^2 = 3$ y $x = y^2$ son ortogonales.

63. Encuentre una fórmula para $f^n(x)$ en cada caso: a. $f(x) = e^{2x}$ y

b. $f(x) = \frac{1}{3x^3}$

64. Encontrar la derivada de orden superior que se indica en cada caso.

a. $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

b. $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

c. $f^{(4)}(x) = 2x + 1, f^{(6)}(x)$