Cálculo I

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TRABAJO PRÁCTICO 3: DERIVADAS

DERIVADA POR DEFINICIÓN

1. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición (a través del proceso de límite)

   a. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$ b. $f(x) = 2 - x^2$ c. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

   d. $f(x) = \sqrt{x+4}$ e. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

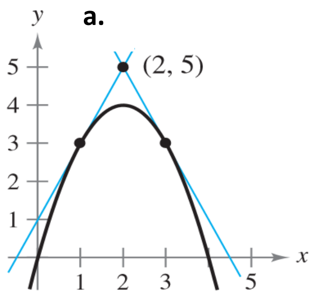
RECTAS TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

2. En los incisos a y b, encontrar las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto señalado

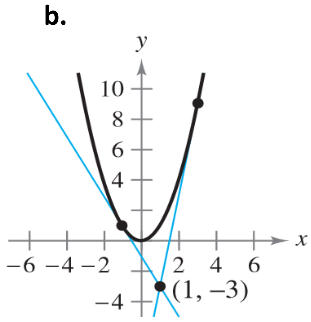
   a. $f(x) = 4x - x^2$

   b. $f(x) = x^2$

a.



b.



3. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x + \frac{4}{x}$ en el punto (2,4). Grafique la curva y la tangente en el mismo par de ejes coordenados.

4. Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

5. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

6. Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto $(2, -3)$. Grafique la parábola y la recta normal.

7. Escriba una ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{2x}{x+1}$ en el punto (1,1).

8. La curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre una ecuación para la recta tangente a esa curva en el punto $(-1, \frac{1}{2})$.

9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \tan(x)$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

10. Determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal

    a. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ b. $y = x^3 + x$ c. $y = \frac{1}{x^2}$ d. $y = x^2 + 9$

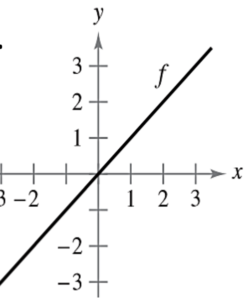
    e. $y = x + senx$, $0 \leq x \leq 2\pi$ f. $y = \sqrt{3}x + 2cosx$, $0 \leq x \leq 2\pi$

11. Halle todos los puntos de la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2\,sen(x) + sen^2(x)$, donde la recta tangente es horizontal.

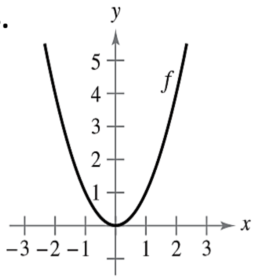
ANÁLISIS DE DERIVADAS DE FUNCIÓN MEDIANTE GRÁFICAS

12. En los siguientes incisos se muestra la gráfica de f. Seleccionar la gráfica de f'.

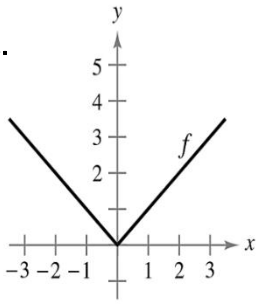
A.



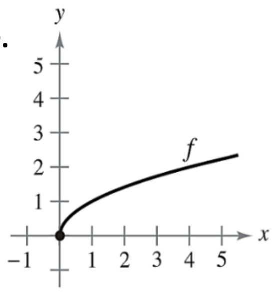
B.



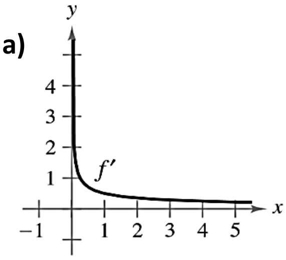
C.



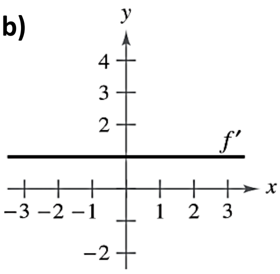
D.



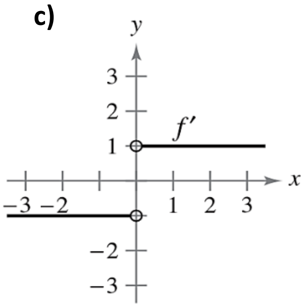
a)



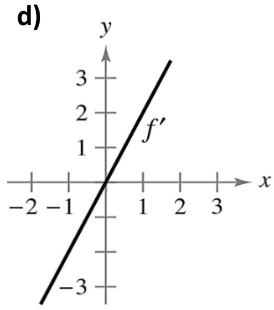
b)



c)

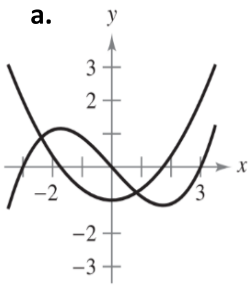


d)

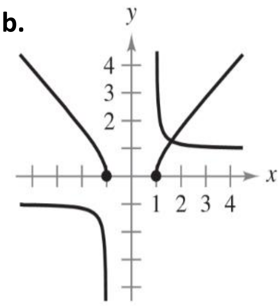


13. A continuación, se muestran las gráficas de una función f y su derivada f'. Clasificar las gráficas según correspondan a f o f' y explicar los criterios usados para tal selección

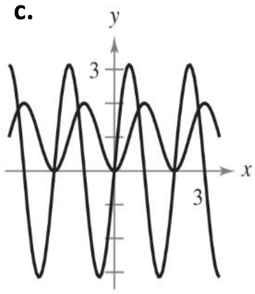
a.



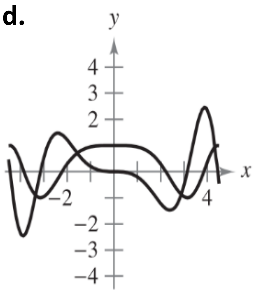
b.



c.

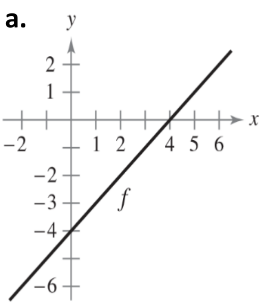


d.

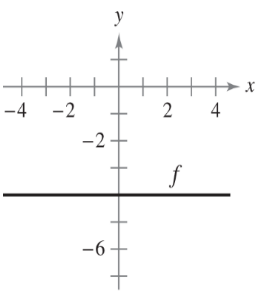


14. A partir de las gráficas de f construir las de f' en cada caso, y explicar cómo se obtuvo la respuesta.

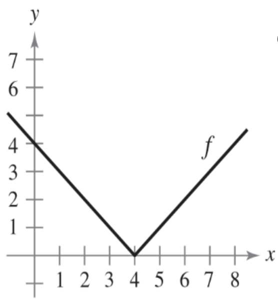
a.



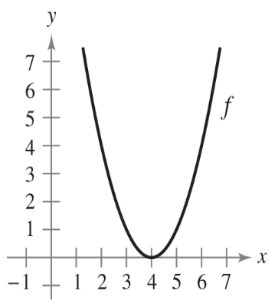
b.



c.

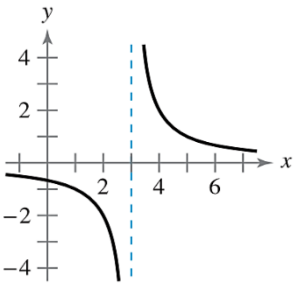


d.

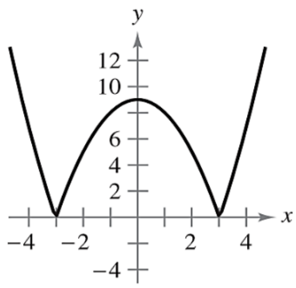


15. Para las siguientes funciones y sus gráficas, describir los valores x para los que f es derivable. Obtener la derivada de la función.

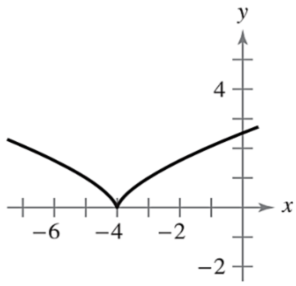
a. $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$



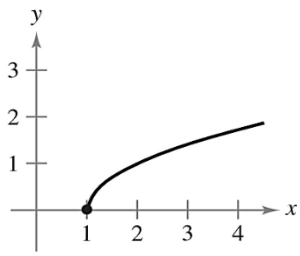
b. $f(x) = |x^2 - 9|$



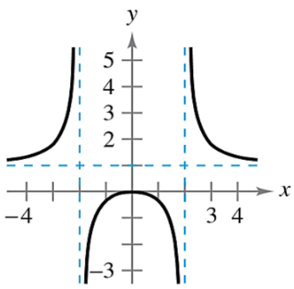
c. $f(x) = (x+4)^{2/3}$



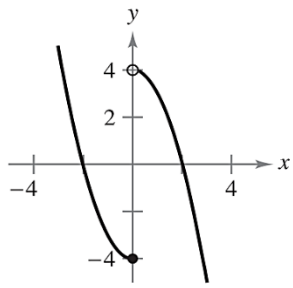
d. $f(x) = \sqrt{x-1}$



e. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

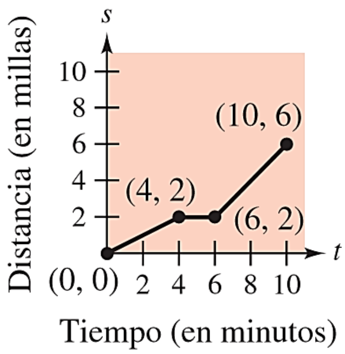


f. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$

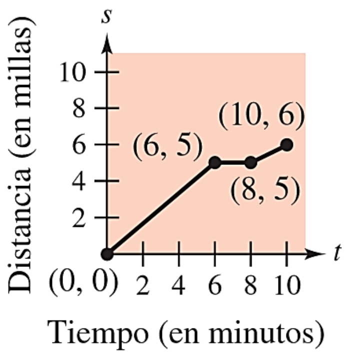


16. A continuación, se muestra la gráfica de una función posición, que representa la distancia recorrida en millas por una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un bosquejo de la función velocidad correspondiente.

a.



b.



DERIVADAS LATERALES, DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

17. Calcular las derivadas laterales en $x = 1$ para cada una de las siguientes funciones. ¿Es derivable la función en $x = 1$?

a. $f(x) = |x - 1|$

b. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

c. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, x \le 1 \\ (x-1)^2, x > 1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

18. En cada caso, determinar si la función es derivable en $x = 2$

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \leq 2 \\ 4x - 3, x > 2 \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \geq 2 \end{cases}$

19. Sea f una función dada por $f(x) = \begin{cases} 2 - x & si\ x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & si\ x > 1 \end{cases}$

¿Es f derivable en el valor 1? Confeccione las gráficas de f y f'.

20. Decidir en qué puntos son derivables las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -1 \\ x^2 & si \quad |x| < 1 \\ 2x + 1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 7 - x & si \quad x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + 4x & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - 1 & si \quad 2 < x < 5 \\ 5x - 1 & si \quad 5 \leq x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq -1 \\ x + 2 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{4}x^2 + 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

21. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

22. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ tan\ x, & 0 \leq x \leq \pi/4 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

23. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 1$?¿ Es derivable en $x = 1$? Justificar

24. ¿Para qué valor o valores de la constante m, si existen, la función $f(x) = \begin{cases} sen2x, & x \leq 0 \\ mx, & x \geq 0 \end{cases}$

es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

REGLAS DE DERIVACIÓN

25. Derive la función f respecto de x o respecto de t, según corresponda:

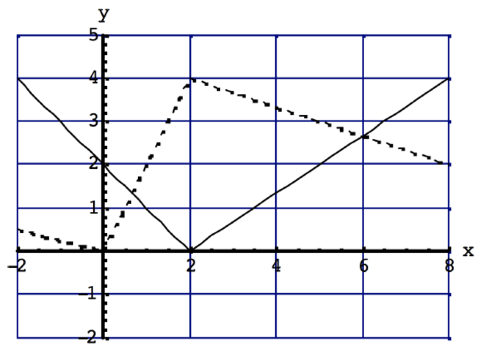
a. $y = x^2.e^x$ b. $y = \frac{e^x}{x^2}$ c. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ d. $f(t) = \frac{4t+5}{2-3t}$ e. $f(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$

26. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores de:

a. $(fg)'(5)$ b. $\left(\frac{f}{g}\right)'(5)$ c. $\left(\frac{g}{f}\right)'(5)$

27. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

28. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación, siendo f la gráfica representada con línea sólida y g la representada con línea de puntos. Sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Encuentre $u'(1)$ y $v'(5)$.



29. Emplear las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función en cada caso

a. $y = \frac{1}{x^5}$ b. $y = \sqrt[5]{x}$ c. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$ d. $f(t) = t^3 \cos(t)$

e. $f(\theta) = \frac{\pi}{2} sen\theta - cos\theta$ f. $f(x) = \frac{5}{(2x)^3} + 2cosx$ g. $f(x) = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

h. $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x}$ i. $f(x) = x(x^2 + 1)$ j. $f(x) = 3x(6x - 5x^2)$

k. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$ l. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3cosx$ m. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5cosx$

n. $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$ o. $f(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$ p. $f(x) = \frac{x}{sen\,(x)+\cos(x)}$

q. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ r. $f(t) = \frac{t^2+4}{5t-3}$ s. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$

t. $f(s) = \frac{s}{\sqrt{s}-1}$ u. $f(x) = \frac{sen\,x}{x^2}$ v. $f(t) = \frac{\cos t}{t^3}$

30. Encontrar la derivada de las siguientes funciones

a. $f(x) = \frac{x^3+5x+3}{x^2-1}$ b. $f(x) = x^4\left(1 - \frac{2}{x+1}\right)$ c. $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$ d. $f(x) = \frac{2-1/x}{x-3}$

e. $f(x) = \frac{x^2+c^2}{x^2-c^2}$, c es una constante. f. $f(x) = \frac{3(1-sen\,x)}{2\cos x}$ g. $f(\theta) = 5\theta sec\theta + \theta \tan\theta$

31. En los siguientes ejercicios verificar que $f'(x) = g'(x)$, explicar la relación que existe entre f y g

a. $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ $g(x) = \frac{5x+4}{x+2}$

b. $f(x) = \frac{sen\,x-3x}{x}$ $g(x) = \frac{sen\,x+2x}{x}$

REGLA DE LA CADENA

32. Derive aplicando la regla de la cadena:

a. $h(x) = (x^2 + 4x + 6)^5$ b. $h(x) = \cos(tan(x))$ c. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$ e. $f(x) = \cos(a^3 + x^3)$ f. $h(t) = \left(\frac{t-6}{t+7}\right)^3$

g. $f(x) = e^{x\cos(x)}$ h. $h(x) = \frac{1+\sqrt{sen\ (3x)}}{1-x+x^5}$ i. $f(t) = \cos(x\ sen(x))$

j. $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ k. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ l. $f(x) = \ln(2-x)$

m. $f(x) = \ln(\cos(x))$ n. $f(x) = \cos(\ln(x))$ o. $f(x) = e^x \ln(x)$

33. Suponga $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6)$. Halle $F'(3)$.

34. Use la regla de la cadena para demostrar lo siguiente:
    a. La derivada de una función par es una función impar.
    b. La derivada de una función impar es una función par.

35. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena
    a. $g(x) = 3(4-9x)^4$ b. $y = \sqrt[3]{6x^2+1}$ c. $f(t) = \left(\frac{1}{t-3}\right)^2$ d. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

    e. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ f. $f(v) = \left(\frac{1-2v}{1+v}\right)^3$ g. $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$ h. $g(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$

    i. $f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$ j. $f(t) = \sqrt{\sqrt{t+1}+1}$ k. $y = sen\ (\pi x)^2$

    l. $y = \cos(1-2x)^2$ m. $f(x) = sen\ 2x \cos 2x$ n. $f(v) = \frac{\cos v}{cosec\ v}$

    o. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$ p. $h(t) = 2\cot^2(\pi t + 2)$ q. $y = sen\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{sen\ x}$

    r. $y = sen(tan 2x)$ s. $y = cos\sqrt{sen(\tan \pi x)}$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

36. Dada la ecuación $xy + 2x + 3x^2 = 4$:
    a. Encuentre y' por derivación implícita
    b. Resuelva la ecuación en forma explícita para y, y luego derive para obtener y' en términos de x.
    c. Compruebe que sus soluciones para los incisos (a) y (b) son consistentes, sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

37. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita siendo $y = f(x)$.
    a. $x^2 + y^2 = 1$ b. $x^2y + xy^2 = 3x$ c. $4\cos(x) sen\ (x) = 1$

38. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $\left(-5, \frac{9}{4}\right)$

39. Halle la derivada de la función f en cada caso. Simplifique donde se pueda.

    a. $f(x) = arcsen\ (x^2)$ b. $f(x) = arctang\ (e^x)$

40. Demuestre que las curvas $2x^2 + y^2 = 3$ y $x = y^2$ son ortogonales.

41. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita:

a. $x^2 + y^2 = 9$ b. $x^2 - y^2 = 25$ c. $x^{1/2} - y^{1/2} = 16$ d. $x^3 - y^3 = 64$

e. $x^3 - xy + y^2 = 7$ f. $x^2y - y^2x = -2$ g. $x^3y^3 - y = x$ h. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$

i. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$ j. $4 \cos x \, sen \, y = 1$ k. $(sen \, \pi x + cos \pi y)$^2 $= 2$ l. $sen x = x(1 + tan \, y)$

m. $cot \, y = x - y$ n. $sen \, x + 2cos \, 2y = 1$ o. $y = sen \, xy$ p. $x = sec \, (1/y)$

42. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado

a. $xy = 6$, (-6,-1) b. $x^2 - y^3 = 0$, (1,1) c. $y^2 = \frac{x^2-49}{x^2+49}$, (7,0) d. $(x + y)^3 = x^3 + y^3$, (-1,1)

e. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5$, (8,1) f. $\tan(x + y) = x$, (0,0) g. $x cos \, y = 1$, (2,π/3) h. $x^3 + y^3 = 6xy + 1$,(2,3)

43. Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ en (1,2). Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

44. Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ en (3,-2). Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

45. Encontrar la derivada segunda de las siguientes funciones

a. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$ b. $f(x) = x + 32 \, x^{-2}$ c. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

d. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$ e. $f(x) = x \, sen \, (x)$ f. $f(x) = \sec(x)$

g. $f(\theta) = \cos(2\theta)$

46. Determine la derivada tercera de $y = \sqrt{2x + 3}$

47. Si $f(x) = (2 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$, determine $f(0), f'(0), f''(0)$ y $f'''(0)$

48. Calcule la derivada segunda de $x^3 + y^3 = 1$ mediante derivación implícita.

49. Encuentre una fórmula para $f^n(x)$ en cada caso: a) $f(x) = e^{2x}$ y b) $f(x) = \frac{1}{3x^3}$

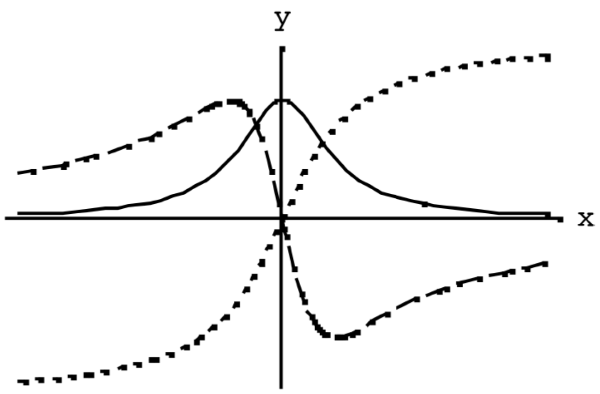
50. Encontrar la derivada de orden superior que se indica

a. $f''^{(x)} = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$ b. $f'''^{(x)} = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$ c. $f^{(4)}(x) = 2x + 1, f^{(6)}(x)$

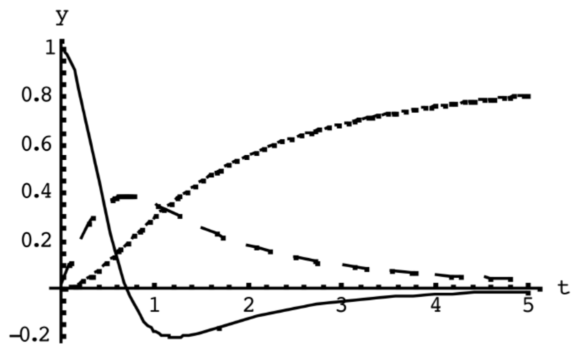
51. Encuentre y' e y'' de $y = x \, ln \, (x)$

52. *Búsqueda de un patrón*: sea $f(x) = sen\,(\beta x)$, donde β es una constante.
    a. Calcular las 4 primeras derivadas de la función.
    b. Verificar que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.
    c. Utilizar los resultados del apartado (a) para desarrollar fórmulas generales para las derivadas de orden par e impar: $f^{2k}(x)$ y $f^{2k-1}(x)$.

53. La figura que se presenta a continuación muestra las gráficas de f, f', y f''. Identifique cada curva y explique sus elecciones.



54. La figura que sigue presenta las gráficas de tres funciones: posición, velocidad y aceleración de un automóvil. Identifique cada curva y explique su elección.



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

55. Una partícula se mueve según la ley de movimiento $s = f(t) = t^2 - 10t + 12, t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.
    a. Encuentre la velocidad en el instante t.
    b. Indique la velocidad después de 3 s.
    c. ¿Cuándo la partícula está en reposo?
    d. ¿Cuándo se mueve hacia adelante?
    e. Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
    f. Grafique el movimiento de la partícula.

56. La función de posición de una partícula está dada por $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 7t$, siendo $t \geq 0$. ¿En qué instante alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?

57. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada. Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8\, sen\,(t)$, donde t está en segundos y x en centímetros. a) Encuentre la velocidad en el instante t. b) Halle la posición y la velocidad de la masa en el instante $t = 2\pi/3$ ¿En qué dirección se mueve en ese instante?

58. Una partícula se mueve de acuerdo con una ley de movimiento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t, t \geq 0$, donde t está dado en segundos y s en metros.
    a. Encuentre la aceleración en el tiempo t y después de 3 s.
    b. Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$.
    c. ¿Cuándo aumenta la partícula su velocidad? ¿Cuándo la reduce?

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

59. Aplique derivación logarítmica para hallar la derivada de y en cada caso:

    a. $y = x^x$ siendo $x > 0$ b. $y = x^{sen(x)}$ siendo $x > 0$

    c. $y = (lnx)^{\cos(x)}$ siendo $x \geq 1$

60. Use la definición de derivada para probar que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

NOCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

61. Una ecuación $y'' + y' - 2y = sen\,(x)$ se llama ecuación diferencial porque involucra una función desconocida, en este caso y, y sus derivadas y' e y''. Encuentre las constantes A y B con las cuales la función $y = A\, sen(x) + B\, cos\,(x)$ satisfaga esta ecuación.

62. ¿Para qué valores de r satisface la función de ecuación $y = e^{rx}$ a la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?