Elementos de Cálculo

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TRABAJO PRÁCTICO 3: DERIVADAS

DERIVADA POR DEFINICIÓN

1. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición (a través del proceso de límite)

   a. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$ b. $f(x) = 2 - x^2$ c. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

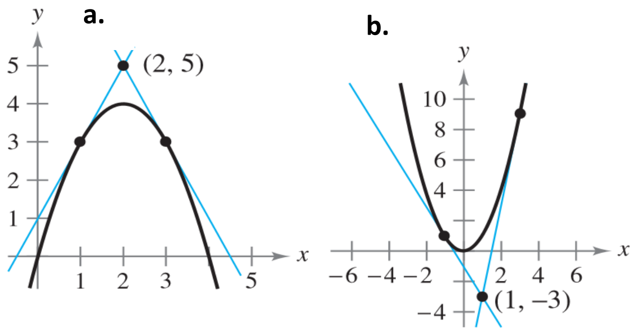
   d. $f(x) = \sqrt{x+4}$ e. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

RECTAS TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

2. En los incisos a y b, encontrar las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto señalado

   a. $f(x) = 4x - x^2$

   b. $f(x) = x^2$



3. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x + \frac{4}{x}$ en el punto (2,4). Grafique la curva y la tangente en el mismo par de ejes coordenados.

4. Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

5. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

6. Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto $(2, -3)$. Grafique la parábola y la recta normal.

7. Escriba una ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{2x}{x+1}$ en el punto (1,1).

8. La curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre una ecuación para la recta tangente a esa curva en el punto $(-1, \frac{1}{2})$.

9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \tan(x)$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

10. Determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal

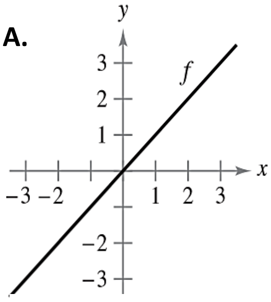
    a. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ b. $y = x^3 + x$ c. $y = \frac{1}{x^2}$ d. $y = x^2 + 9$

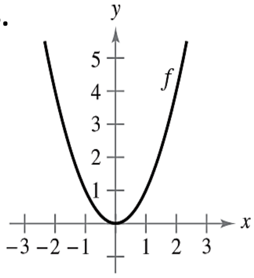
    e. $y = x + senx$, $0 \le x \le 2\pi$ f. $y = \sqrt{3}x + 2cosx$, $0 \le x \le 2\pi$

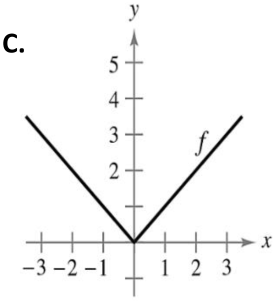
11. Halle todos los puntos de la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2\,sen(x) + sen^2(x)$, donde la recta tangente es horizontal.

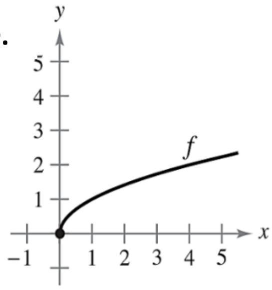
ANÁLISIS DE DERIVADAS DE FUNCIÓN MEDIANTE GRÁFICAS

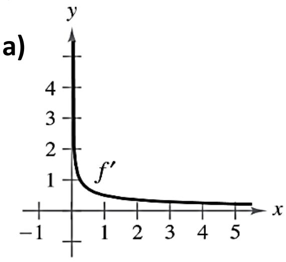
12. En los siguientes incisos se muestra la gráfica de f. Seleccionar la gráfica de f'.

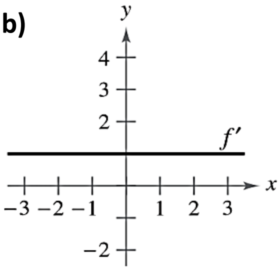
A.


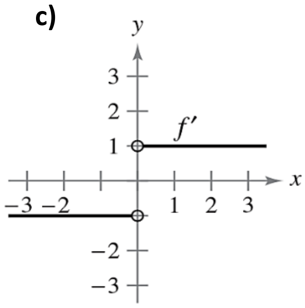
B.


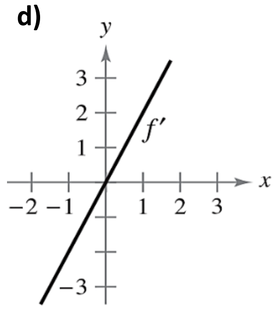
C.


D.


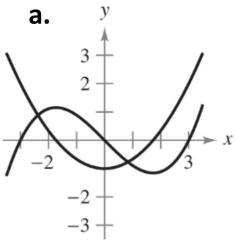
a)


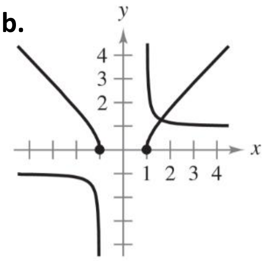
b)


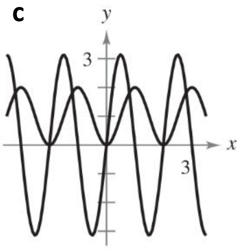
c)


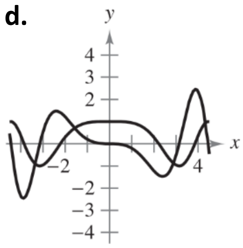
d)


13. A continuación, se muestran las gráficas de una función f y su derivada f’. Clasificar las gráficas según correspondan a f o f’ y explicar los criterios usados para tal selección

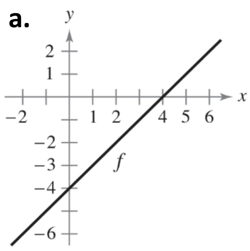
a.


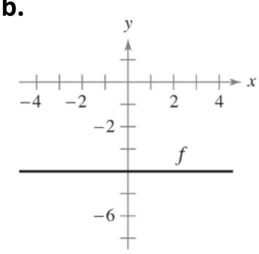
b.


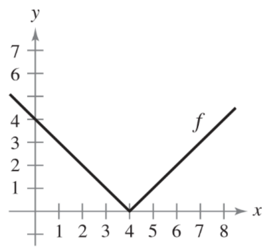
c


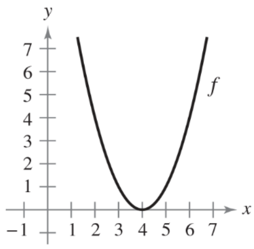
d.


14. A partir de las gráficas de f construir las de f' en cada caso, y explicar cómo se obtuvo la respuesta.

a.


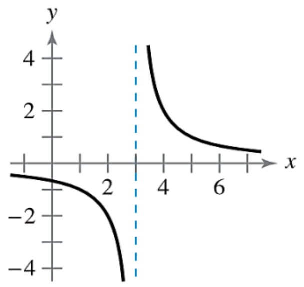
b.


c.


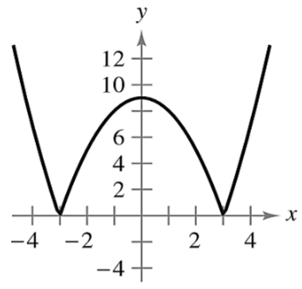
d.


15. Para las siguientes funciones y sus gráficas, describir los valores x para los que f es derivable. Obtener la derivada de la función.

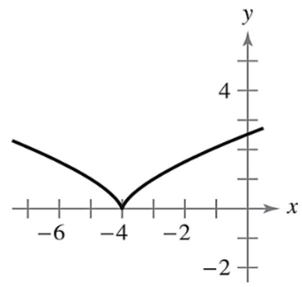
a. $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$



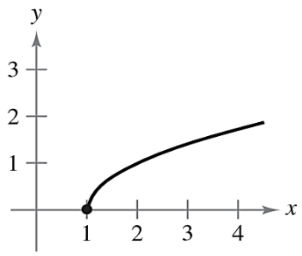
b. $f(x) = |x^2 - 9|$



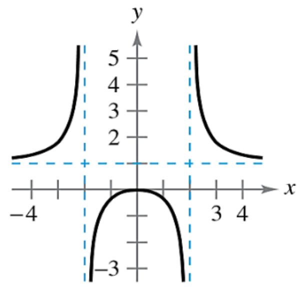
c. $f(x) = (x + 4)^{2/3}$



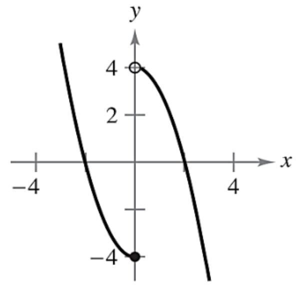
d. $f(x) = \sqrt{x-1}$



e. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$



f. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



DERIVADAS LATERALES, DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

16. Calcular las derivadas laterales en $x = 1$ para cada una de las siguientes funciones. ¿Es derivable la función en $x = 1$?

    a. $f(x) = |x - 1|$

    b. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

    c. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, x \le 1 \\ (x-1)^2, x > 1 \end{cases}$

    d. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

17. En cada caso, determinar si la función es derivable en $x = 2$

    a. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \le 2 \\ 4x - 3, x > 2 \end{cases}$

    b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \ge 2 \end{cases}$

18. Sea f una función dada por $f(x) = \begin{cases} 2 - x & si\ x \le 1 \\ x^2 - 2x + 2 & si\ x > 1 \end{cases}$

    ¿Es f derivable en el valor 1? Confeccione las gráficas de f y f'.

19. Decidir en qué puntos son derivables las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le -1 \\ x^2 & si \quad |x| < 1 \\ 2x + 1 & si \quad 1 \le x \le 2 \\ 7 - x & si \quad x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + 4x & si \quad x \le 2 \\ x^2 - 1 & si \quad 2 < x < 5 \\ 5x - 1 & si \quad 5 \le x \end{cases}$$

20. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

21. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ tan\, x, & 0 \leq x \leq \pi/4 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

22. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

¿La función es continua es $x = 1$?¿ Es derivable en $x = 1$? Justificar

23. ¿Para qué valor o valores de la constante m, si existen, la función $f(x) = \begin{cases} sen2x, & x \leq 0 \\ mx, & x \geq 0 \end{cases}$ es continua es $x = 0$?¿ Es derivable en $x = 0$? Justificar

REGLAS DE DERIVACIÓN

24. Derive la función f respecto de x o respecto de t, según corresponda:

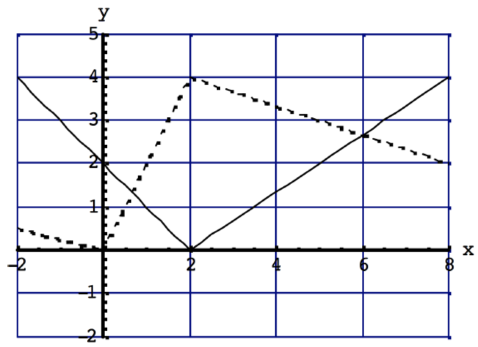
a. $y = x^2.e^x$ b. $y = \frac{e^x}{x^2}$ c. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ d. $f(t) = \frac{4t+5}{2-3t}$ e. $f(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$

25. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores de:

a. $(fg)'(5)$ b. $\left(\frac{f}{g}\right)'(5)$ c. $\left(\frac{g}{f}\right)'(5)$

26. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

27. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación, siendo f la gráfica representada con línea sólida y g la representada con línea de puntos. Sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Encuentre $u'(1)$ y $v'(5)$.



28. Emplear las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función en cada caso

a. $y = \frac{1}{x^5}$ b. $y = \sqrt[5]{x}$ c. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$ d. $f(t) = t^3 \cos(t)$

e. $f(\theta) = \frac{\pi}{2} sen\theta - cos\theta$ f. $f(x) = \frac{5}{(2x)^3} + 2cosx$ g. $f(x) = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

h. $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x}$ i. $f(x) = x(x^2 + 1)$ j. $f(x) = 3x(6x - 5x^2)$

k. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$ l. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3cosx$ m. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5cosx$

n. $f(x) = (x^2+3)(x^2-4x)$ o. $f(t) = \sqrt{t}(1-t^2)$ p. $f(x) = \frac{x}{sen\,(x)+\cos(x)}$

q. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ r. $f(t) = \frac{t^2+4}{5t-3}$ s. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$

t. $f(s) = \frac{s}{\sqrt{s}-1}$ u. $f(x) = \frac{sen\,x}{x^2}$ v. $f(t) = \frac{\cos t}{t^3}$

29. En los siguientes ejercicios verificar que $f'(x) = g'(x)$, explicar la relación que existe entre f y g
    a. $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ $g(x) = \frac{5x+4}{x+2}$
    b. $f(x) = \frac{sen\,x-3x}{x}$ $g(x) = \frac{sen\,x+2x}{x}$

REGLA DE LA CADENA

30. Derive aplicando la regla de la cadena:
    a. $h(x) = (x^2+4x+6)^5$ b. $h(x) = \cos(tan(x))$ c. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
    d. $f(x) = \sqrt{x^2-7x}$ e. $f(x) = \cos(a^3+x^3)$ f. $h(t) = \left(\frac{t-6}{t+7}\right)^3$
    g. $f(x) = e^{x\cos(x)}$ h. $h(x) = \frac{1+\sqrt{sen\,(3x)}}{1-x+x^5}$ i. $f(t) = \cos(x\,sen(x))$
    j. $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ k. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ l. $f(x) = \ln(2-x)$
    m. $f(x) = \ln(\cos(x))$ n. $f(x) = \cos(\ln(x))$ o. $f(x) = e^x\ln(x)$

31. Suponga $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6)$. Halle $F'(3)$.

32. Encontrar la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena
    a. $g(x) = 3(4-9x)^4$ **b.** $y = \sqrt[3]{6x^2+1}$ **c.** $f(t) = \left(\frac{1}{t-3}\right)^2$ **d.** $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
    e. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **f.** $f(v) = \left(\frac{1-2v}{1+v}\right)^3$ **g.** $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$ **h.** $g(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$
    i. $f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$ **j.** $f(t) = \sqrt{\sqrt{t+1}+1}$ **k.** $y = sen\,(\pi x)^2$
    l. $y = \cos(1-2x)^2$ **ll.** $f(x) = sen\,2x\cos 2x$ **m.** $f(v) = \frac{\cos v}{cosec\,v}$
    n. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$ **o.** $h(t) = 2\cot^2(\pi t+2)$ **p.** $y = sen\,\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{sen\,x}$
    q. $y = sen(tan2x)$ **r.** $y = cos\sqrt{sen(\tan\pi x)}$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

33. Dada la ecuación $xy + 2x + 3x^2 = 4$:
    a. Encuentre y' por derivación implícita

b. Resuelva la ecuación en forma explícita para y, y luego derive para obtener y' en términos de x.
c. Compruebe que sus soluciones para los incisos (a) y (b) son consistentes, sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

34. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita siendo $y = f(x)$.
a. $x^2 + y^2 = 1$ b. $x^2y + xy^2 = 3x$ c. $4\cos(x)sen\,(x) = 1$

35. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $\left(-5, \frac{9}{4}\right)$

36. Halle la derivada de la función f en cada caso. Simplifique donde se pueda.

a. $f(x) = arcsen\,(x^2)$ b. $f(x) = arctang\,(e^x)$

37. Demuestre que las curvas $2x^2 + y^2 = 3$ y $x = y^2$ son ortogonales.

38. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita:

a. $x^2 + y^2 = 9$ **b.** $x^2 - y^2 = 25$ **c.** $x^{1/2} - y^{1/2} = 16$ **d.** $x^3 - y^3 = 64$
e. $x^3 - xy + y^2 = 7$ **f.** $x^2y - y^2x = -2$ **g.** $x^3y^3 - y = x$ **h.** $\sqrt{xy} = x^2y + 1$
i. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$ **j.** $4\,cos\,x\,sen\,y = 1$ **k.** $(sen\,\pi x + cos\pi y)$^2 $= 2$ **l.** $senx = x(1 + tan\,y)$
m. $cot\,y = x - y$ **n.** $sen\,x + 2cos\,2y = 1$ **o.** $y = sen\,xy$ **p.** $x = sec\,(1/y)$

39. Encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado

a. $xy = 6$, (-6,-1) **b.** $x^2 - y^3 = 0$, (1,1) **c.** $y^2 = \frac{x^2-49}{x^2+49}$, (7,0) **d.** $(x + y)^3 = x^3 + y^3$, (-1,1)

e. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5$, (8,1) **f.** $\tan(x + y) = x$, (0,0) **g.** $xcos\,y = 1$, (2,π/3) **h.** $x^3 + y^3 = 6xy + 1$, (2,3)

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

40. Encontrar la derivada segunda de las siguientes funciones
a. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$ b. $f(x) = x + 32x^{-2}$ c. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

d. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$ e. $f(x) = xsen\,x$ f. $f(x) = \sec x$

g. $f(\theta) = \cos(2\theta)$

41. Determine la derivada tercera de $y = \sqrt{2x+3}$

42. Si $f(x) = (2 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$, determine $f(0), f'(0), f''(0)$ y $f'''(0)$

43. Calcule la derivada segunda de $x^3 + y^3 = 1$ mediante derivación implícita.

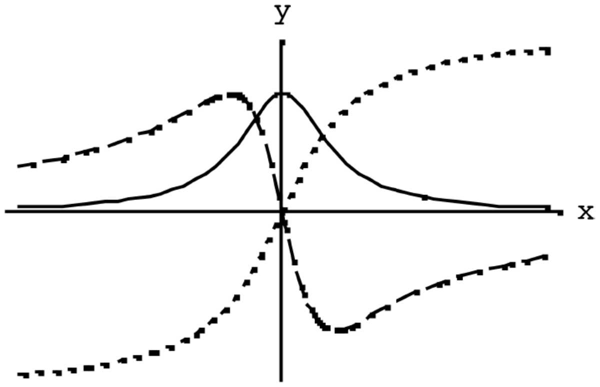
44. Encuentre una fórmula para $f^n(x)$ en cada caso: a) $f(x) = e^{2x}$ y b) $f(x) = \frac{1}{3x^3}$

45. Encontrar la derivada de orden superior que se indica

a. $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$ b. $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$ c. $f^{(4)}(x) = 2x + 1, f^{(6)}(x)$

46. Encuentre y' e y'' de $y = x\, ln\,(x)$

47. La figura que se presenta a continuación muestra las gráficas de f, f', y f''. Identifique cada curva y explique sus elecciones.

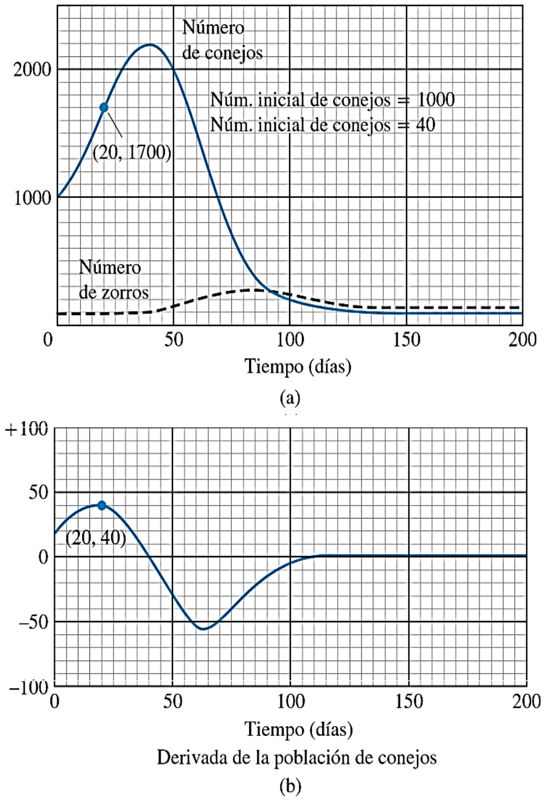


PROBLEMAS DE APLICACIÓN

48. La Ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Utilizar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

49. Cuando un bactericida se agregó a un cultivo de nutrientes en el que las bacterias crecían, la población de bacterias continuó su crecimiento por un tiempo, pero luego dejó de crecer y empezó a disminuir. El tamaño de la población en el tiempo t (horas) fue $B(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Calcular el valor de t a partir del cual la población de bacterias comienza a disminuir.

50. Las gráficas que se muestran a continuación representan los números de conejos y zorros en una pequeña población del Ártico, los cuales se grafican como funciones del tiempo para 200 días. En el gráfico a) se muestra que, en un principio, el número de conejos aumenta conforme éstos se reproducen. Pero los zorros se alimentan de conejos, de manera que cuando el número de zorros aumenta, la población de conejos se estabiliza y luego declina. En el b) presenta la gráfica de la derivada de la población de conejos. Responder:
   a. ¿Cuál es el valor de la derivada de la población de conejos cuando el número de éstos es máximo? ¿Y cuándo se registra el mínimo número de conejos?
   b. ¿Cuál es el tamaño de la población de conejos cuando su derivada es la mayor posible? ¿Y cuándo es la menor posible (negativa)?
   c. ¿En qué unidades deben medirse las pendientes de las curvas de población de conejos y de zorros?



DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

51. Aplique derivación logarítmica para hallar la derivada de y en cada caso:

a. $y = x^x$ siendo $x > 0$ b. $y = x^{sen(x)}$ siendo $x > 0$

c. $y = (lnx)^{\cos(x)}$ siendo $x \geq 1$

NOCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

52. Una ecuación $y'' + y' - 2y = sen\,(x)$ se llama ecuación diferencial porque involucra una función desconocida, en este caso y, y sus derivadas y' e y''. Encuentre las constantes A y B con las cuales la función $y = A\,sen(x) + B\,cos\,(x)$ satisfaga esta ecuación.

53. ¿Para qué valores de r satisface la función de ecuación $y = e^{rx}$ a la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?