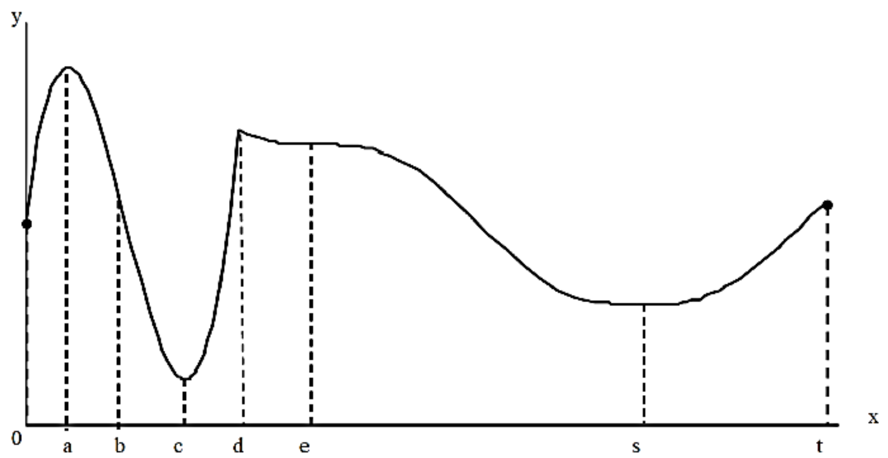
Trabajo Práctico Nº4: Aplicaciones de las Derivadas

Objetivo: que el estudiante emplee los conceptos adquiridos en derivación para: recuperar una función a partir de su derivada, resolver problemas de optimización, determinar valores extremos de funciones, y para obtener y analizar las formas de las gráficas (puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión). Que el estudiante además, aplique derivación para resolver límites indeterminados a partir de la regla de L' Hospital.

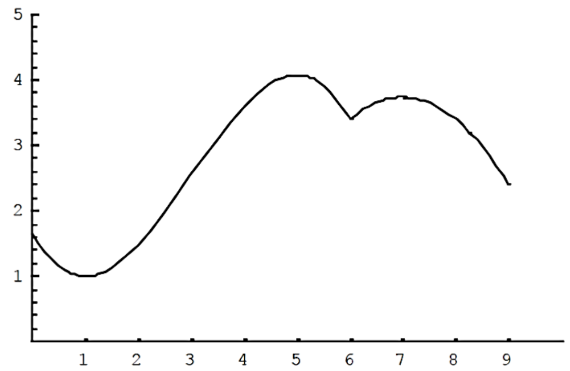
NOTA AL ESTUDIANTE: los ejercicios destacados "en negrita" son aquellos a desarrollar por el docente en las clases prácticas. El resto de los ejercicios, como así también los ejercicios propuestos como extra-áulicos deben ser resueltos en forma completa por el estudiante. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.
Se recomienda, además, disponer de alguna herramienta de graficación contra la cual comparar los resultados obtenidos en el desarrollo "manual" de cada ejercicio.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

1. **Para cada uno de los números *0, a, b, c, d, e, s y t*; diga si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo relativo o no tiene ni máximos ni mínimos.**



2. Utilice la gráfica de la función *f* para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y relativos de dicha función.



3. Dibuje la gráfica de una función que sea continua sobre [0,3] y tenga un máximo absoluto en 0, un mínimo absoluto en 3, un mínimo relativo en 1 y un máximo relativo en 2.

4. Trace la gráfica de una función sobre [-1,2] que tenga:
   a. Un máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.
   b. Un máximo absoluto y un mínimo absoluto, y presente una discontinuidad.

5. **Encuentre los valores críticos de la función:**
   a. $f(x) = 8 - 3x \quad para\ x \geq 1$
   b. $\boldsymbol{f(x) = x^{2} \quad para\ -3 \leq x \leq 2}$
   c. $\boldsymbol{f(\theta) = sen\,\theta \quad para\ -2\pi \leq x \leq} 2\pi$

6. En cada uno de los casos que se presentan a continuación, dibuje la gráfica de la función f y encuentre los máximos y mínimos relativos de la misma.

   a. $f(t) = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 4$ b. $g(x) = |2x + 3|$ c. $h(x) = x\,ln\,x$

7. **Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de *f* sobre el intervalo dado.**

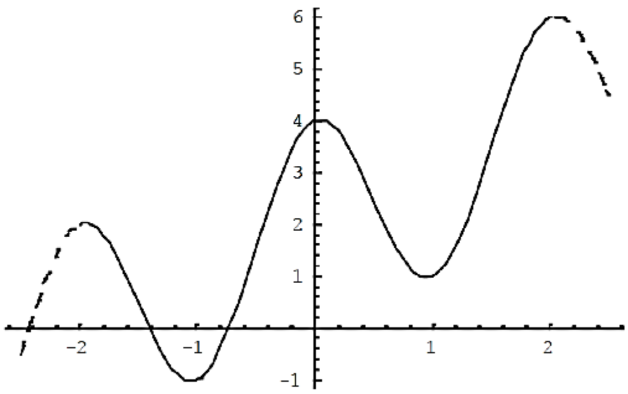
   a. $f(x) = 3x^2 - 12t + 5 \quad [0,3]$ b. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad [0,2]}$ c. $\boldsymbol{f(x) = x * e^{-x} \quad [0,2]}$

TEOREMA DE ROLLE Y DEL VALOR MEDIO

8. Compruebe que la función f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,4]. A continuación, determine todos los números $x = c$ que satisfacen la conclusión de dicho teorema.

9. **Sea $\boldsymbol{f(x) = (x-1)^{-2}}$.Demuestre que $\boldsymbol{f(0) = f(2)}$ pero no existe un numero $\boldsymbol{x = c}$ en $\boldsymbol{(0,2)}$ tal que $\boldsymbol{f'(c) = 0}$ ¿ Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?**

10. Emplee la gráfica de f para estimar los valores de $x = c$ que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[-2,2]$.



11. Sea $f(x) = |x - 1|$. Demuestre que no hay un valor de $x = c$ tal que $f(3) - f(0) = f'(c) * (3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

12. **Demuestre:**

    a. **Que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una raíz y solo una.**

    b. **Que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + m$ no posee 2 raíces distintas en [0,1]**

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES, CRITERIOS DE LA PRIMERA DERIVADA, CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

13. **Use la gráfica de la función f para hallar lo siguiente:**

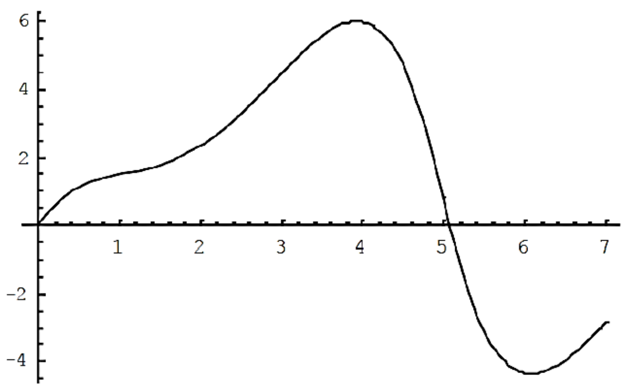
    a. Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde crece f.

    b. Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde decrece f.

    c. Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f es cóncava hacia arriba.

    d. Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f es cóncava hacia abajo.

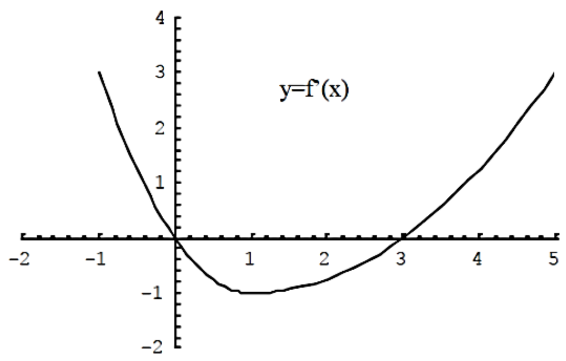
    e. Las coordenadas de los puntos de inflexión.

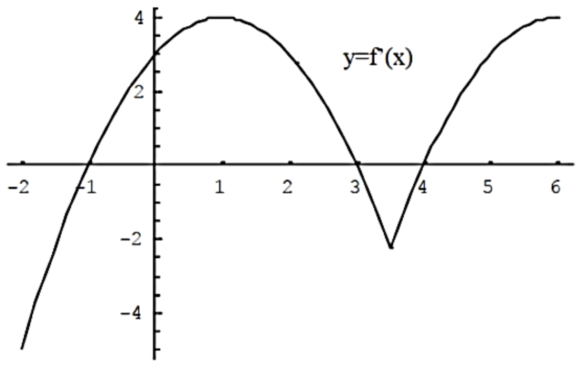


14. En cada uno de los casos que se presentan a continuación, se muestra la gráfica de la derivada f' de una función f. Responda:

    a. ¿En qué intervalos es creciente o decreciente f?

    b. En que valores de x tiene f un máximo o mínimo relativo?





15. **En el gráfico siguiente, aparece la gráfica de la derivada f' de una función continua f.**

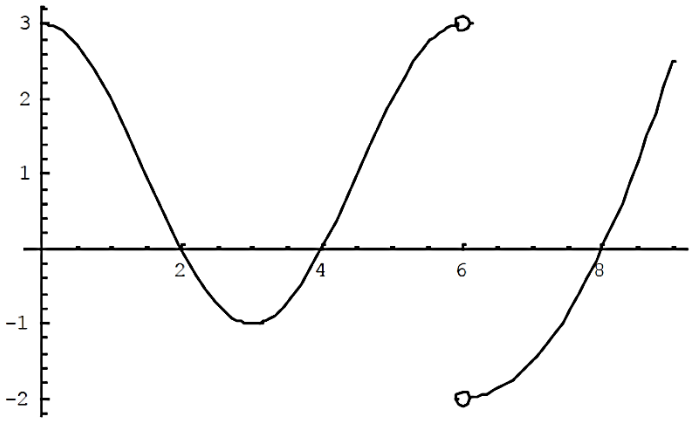
   a. ¿En qué intervalos es creciente o decreciente f?

   b. ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo relativo?

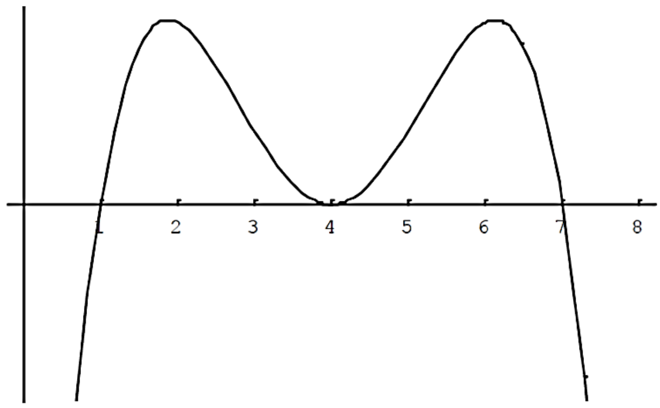
   c. ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

   d. Defina las abscisas de los puntos de inflexión.

   e. Sabiendo que $f(0) = 0$, trace una gráfica de $f(x)$.



16. Se muestra la gráfica de la segunda derivada f'' de una función f. Diga cuales son las abscisas de los puntos de inflexión. Justifique su respuesta.



17. **Para cada una de las funciones que se indican a continuación halle:**

   a. Intervalos de crecimiento; C^+ y de decrecimiento C^-

   b. Valores extremos, máximos y mínimos.

   c. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

   a. $f(x) = x^3 - 12x + 1$ b. $f(x) = x - 2sen\,x \quad para\; 0 < x < 3\pi$ c. $f(x) = xe^x$

REGLA DE L´HOSPITAL

18. **Supóngase que:**

a. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ b. $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ c. $\lim_{x\to a} h(x) = 1$

d. $\lim_{x\to a} p(x) = \infty$ e. $\lim_{x\to a} q(x) = \infty$

¿Cuáles de los siguientes límites son formas indeterminadas? Para los que no sean una forma indeterminada, evalúe el límite, si es posible hacerlo.

a. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ b. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{p(x)}$ c. $\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{p(x)}$ d. $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{f(x)}$

e. $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ f. $\lim_{x\to a}[f(x) * p(x)]$ g. $\lim_{x\to a}[h(x) * p(x)]$ h. $\lim_{x\to a}[p(x) * q(x)]$

i. $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ j. $\lim_{x\to a}[f(x) - p(x)]$ k. $\lim_{x\to a}[p(x) - q(x)]$ l. $\lim_{x\to a}[p(x) + q(x)]$

m. $\lim_{x\to a}[f(x)]^{p(x)}$ n. $\lim_{x\to a}[h(x)]^{p(x)}$ o. $\lim_{x\to a}[p(x)]^{f(x)}$ p. $\lim_{x\to a}[p(x)]^{q(x)}$

q. $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

19. Encuentre el límite aplicando la regla de L´Hospital donde resulte apropiado. Si existe un método más elemental, úselo. Si no puede aplicar la regla de L´Hospital, explique por qué.

a. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$ b. $\lim_{x\to 1} \frac{x^9-1}{x^5-1}$ c. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{sen\,x}$ d. $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x^3}$

e. $\lim_{x\to \pi} \frac{\tan x}{x}$ f. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^3}$ g. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,.\,ln\,x$ h. $\lim_{x\to \pi}(x-\pi) * \cot an\, x$

i. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)$ j. $\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2-1}$ k. $\lim_{x\to 0^+} x^{sen\,x}$ l. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

TRAZADO DE CURVAS

20. **Para cada una de las siguientes funciones:**

a. $y = x^4 + 4x^3$ b. $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ c. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

a. Determine las ecuaciones de sus asíntotas (*emplee lo aprendido en U2*).
b. Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Encuentre los valores extremos, máximos y mínimos.
d. Halle los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
e. Bosqueje la gráfica con la información anterior.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

NOTA: *luego de resolver cada problema, emplear la derivada segunda para verificar que se trata de un mínimo o un máximo según corresponda.*

21. Considere el siguiente problema: Halle dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es máximo.
    a. Haga una tabla de valores, como la siguiente, d modo que la suma de los números de las dos primeras columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia mostrada por la tabla, estime la respuesta del problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

    b. Utilice el cálculo para resolver el problema y compare con la respuesta del inciso (a).

22. **La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(t) = 90 + 15t - 0,6t^2$, donde t es el tiempo transcurrido desde 1 de enero de 1990 contado en años. ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono? ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que se alcanza en esa ciudad?**

23. **¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de 100 m de perímetro y área máxima posible?**

24. **¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con área de 1000 m^2, y perímetro lo menor posible?**

25. **Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 3200 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.**

26. Si se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo de la caja.

27. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en un círculo de radio r.

28. **Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.**
29. Una lata cilíndrica sin tapa se hace contener v cm3 de líquido. Halle las dimensiones que minimicen el costo de material usado.

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

30. Si f es una función tal que $f(1) = 10$, $f'(x)$ existe y $f'(x) \geq 2$ cuando $1 \leq x \leq 4$ ¿Cuán pequeña puede ser $f(4)$?.

31. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2$ para toda x?

32. Trace la gráfica de una función que satisfaga las condiciones en cada inciso:

    a. $f'(-1) = f'(1) = 0\,; f'(x) < 0 \; si \; |x| < 1; f'(x) > 0 \; si \; |x| > 1$

    b. $f'(x) > 0 \; si \; |x| < 1; f(-1) = 4 \; y \; f(1) = 0$

    c. $f''(x) < 0 \; si \; x < 0; f''(x) > 0 \; si \; x > 0$

33. Muestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$ pero que el punto $(0,0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

34. **Para cada una de las siguientes funciones:**

a. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x-1}}$ b. $\boldsymbol{y = x + 3x^{2/3}}$ c. $y = \frac{x}{x^2+9}$

   a. Determine las ecuaciones de sus asíntotas (*emplee lo aprendido en U2*).
   b. Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c. Encuentre los valores extremos, máximos y mínimos.
   d. Halle los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
   e. Bosqueje la gráfica con la información anterior.

35. **Para la función $\boldsymbol{f}$ dada por**: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ ax^3 + bx & -1 < x < 2 \\ 11x - 16 & x \geq 2 \end{cases}$

   a. Hallar *a y b* tales que la función sea continua en los números reales.
   b. Analice dónde la función es derivable.
   c. Halle intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   d. Encuentre los máximos y mínimos.
   e. Halle puntos de inflexión e intervalos de concavidad.
   f. Bosqueje la gráfica, con la información anterior.

36. Dos corredores arrancan al mismo tiempo en una competencia y terminan empatados. Demuestre que en cierto momento de la carrera tuvieron la misma velocidad. (Considere la siguiente sugerencia: defina $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones posición de los dos corredores).

37. Compruebe que valen las igualdades planteadas en a y b:
   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$, para cualquier numero entero n. Considere un ejemplo (valor determinado de n entero) y verifique que vale la igualdad para ese ejemplo. Esta igualdad hace ver que la función exponencial tiende al infinito con mayor rapidez que cualquier potencia de x.

   b. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, para cualquier numero entero $p > 0$. Considere un ejemplo (valor determinado de $p > 0$) y verifique que vale la igualdad para ese ejemplo. Esta igualdad hace ver que la función exponencial tiende al infinito con mayor rapidez que cualquier potencia de x.

38. **Un granjero quiere bordear un área de 457200 m² en un campo rectangular y entonces dividirlo a la mitad con una barda paralela a un lado del rectángulo. ¿Cómo puede hacerlo para minimizar el costo de la barda? Emplear la derivada segunda para verificar que se trata de un mínimo.**

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

Cálculo/ Elementos

39. En un lago la población de peces es *P*, y *H* un parámetro conocido como la razón de pesca, es decir la cantidad de peces que se extraen por unidad de tiempo (peces/año). La tasa de crecimiento de la población de peces como función de la población está dada por:

    $R(P) = 2P - 0{,}02P^2 + H$

    Sabiendo que H=75 peces/año, encuentre el valor de *P* para el cual la tasa de crecimiento de la población de peces sea máxima. Calcule cuánto vale R máxima.

40. De una pieza rectangular de cartón de 25 cm de largo y 10 cm de ancho se recortan cuatro cuadrados de lado x en sus esquinas para hacer una caja con el remanente. Considerando los posibles valores de x, ¿cuál es el valor que hace máximo el volumen o capacidad de la caja (construida sin tapa)?
41. Dada la recta de ecuación $y = 3x + 7$, determine cuál de sus puntos está más próximo al origen de coordenadas.
42. Halle él o los puntos de la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ que estén más cerca del punto (0,2).
43. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hospital?

    $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1}\frac{6x}{2} = 3$$

    (El límite es, en realidad, -4)
44. Halle los límites:

    a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\boldsymbol{tan(x)}}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{cos^2(x)-1}}{\boldsymbol{x^2}}$ c. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x + x)^{1/x}$

45. Use los conocimientos adquiridos para trazar las siguientes curvas. Si la curva tiene una asíntota oblicua, de su ecuación. Verificar el gráfico obtenido mediante empleo de software.

    a. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ b. $y = \frac{(x+3)^2}{x^2-4}$ c. $y = \frac{2x}{x^2-1}$

    d. $y = \frac{x^2}{x-1}$(verifique, mediante el uso de software, qué ocurre si el coeficiente del numerador es menor o mayor que 1)

Cálculo

46. Demuestre que la suma de un número positivo y su recíproco es por lo menos 2.

47. Una lámpara con forma de cono diseñada en 1995 por Verner Panton necesita tener un volumen dado por $\pi r^2 h = \pi$ para ser segura. Para minimizar el área de la superficie $A = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$, se minimiza el cuadrado del área y entonces $\pi^2 r^2\ (h^2 + r^2)$. De la suposición del volumen, se obtiene $r^2 = 1/h$ de modo que se debe minimizar $\left(\frac{\pi^2}{h}\right)\left(h^2 + \frac{1}{h}\right) = \pi^2 f(h)$. ¿Qué altura h minimiza la función $f(h) = h + \frac{1}{h^2}$? Emplear la derivada segunda para verificar que se trata de un mínimo.

48. Demuestre que:
    a. Si $f'(x) \geq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$
    b. Si $f'(x) \leq m$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \leq f(a) + m(b - a)$

49. Sean f, $g: I \to \mathbb{R}$, derivables en todo punto del intervalo abierto I.
    a. Si $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in I$, y $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$
    b. Muestre mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.
    c. Demuestre que $2\sqrt{x} > 3 - 1/x$, cuando $x > 1$.

50. Use los conocimientos adquiridos para trazar las siguientes curvas. Si la curva tiene una asíntota oblicua, dé su ecuación. Verificar el gráfico obtenido mediante empleo de software.
    a. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
    b. $y = x\tan(x)$ con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
    c. $y = e^x - x$