TRABAJO PRÁCTICO 5: INTEGRALES

PARTE A: ANTIDERIVADAS

1. Determine la **antiderivada** más general de cada una de las siguientes funciones (compruebe su respuesta mediante diferenciación)
   a. $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$

   b. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

   c. $f(t) = 3\,cost - 4\,sent$

   d. $f(x) = -\cos(2x) + sen(5x) - x^4$

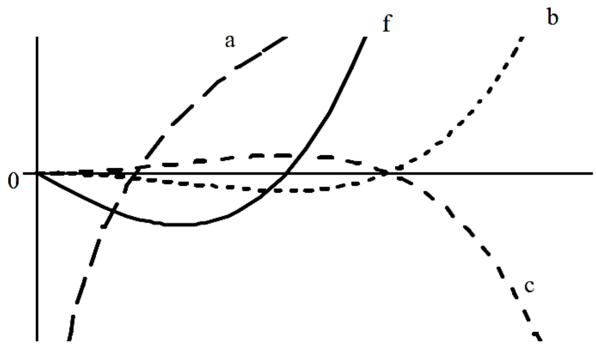
2. Encuentre la antiderivada F de la función f dada por $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, que satisfaga la condición $F(0) = 4$. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de f y F.

3. Halle la función f con la información que se brinda en cada caso:
   a. $f''(x) = 6x + 12x^2$

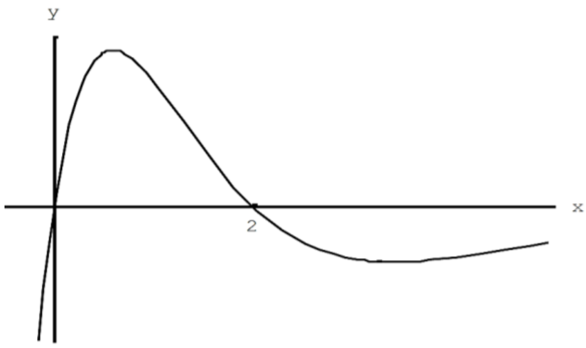
   b. $f'''(t) = e^t$

   c. $f''(x) = x, f(0) = -3, f'(0) = 2$

4. Se muestra la gráfica de una función f. ¿Cuál de las gráficas es la antiderivada de f y por qué?



5. A continuación se presenta la gráfica de una función f. Bosqueje la gráfica de la antiderivada F, si F(0)=0.



6. Un punto material se mueve de acuerdo con las ecuaciones dadas en cada caso. Encuentre su posición.
   a. $v(t) = sent - cost, s(0) = 0$

   b. $a(t) = t - 2, s(0) = 1, v(0) = 3$

7. Una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas
   a. Demuestre que $y = 2 + e^{-x^3}$es una solución de la ecuación diferencial $y' + 3x^2y = 6x^2$.

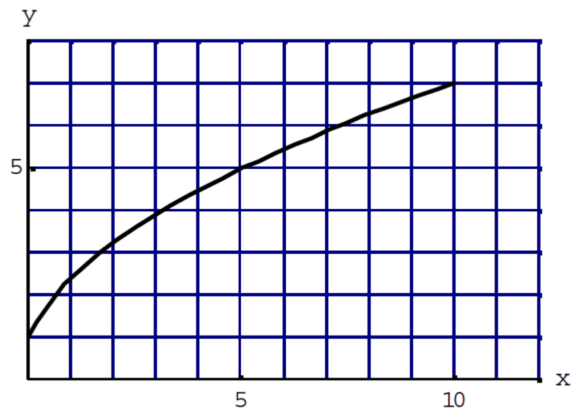
   b. Compruebe que $y = (2 + lnx)/x$ es una solución del problema con valor inicial:

$$\begin{cases} x^2y' + xy = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

   c. ¿Para cuáles valores de r la función $y = e^{rt}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = 0$?

PARTE B: INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN: DESCOMPOSICIÓN Y SUSTITUCIÓN

1. Dada la siguiente gráfica de la función f:



   a. Lea los valores a partir de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área bajo esa gráfica dada de f, desde x=0 hasta x=10. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.

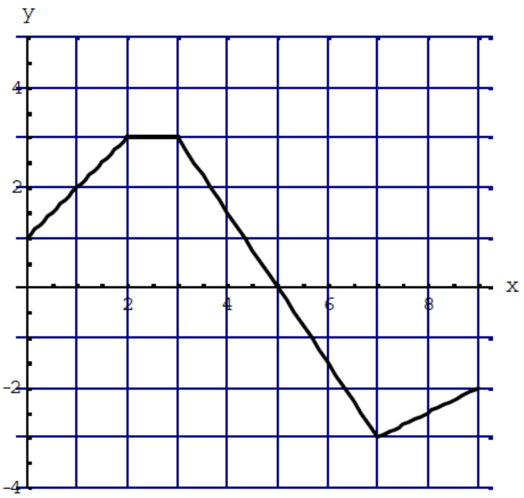
   b. Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos en cada caso.

2. Sea f la función dada por $f(x) = 1/x$

   a. Estime el área bajo la gráfica de f desde x=1 hasta x=5 con cuatro rectángulos de aproximación y tomando extremos derechos. Bosqueje la gráfica y los rectángulos ¿Se trata de una subestimación (suma inferior) o una sobreestimación (suma superior)?

3. Use la definición de área de una región, como límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, con el fin de encontrar una expresión para área bajo la gráfica de f dada por: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ entre x=0 y x=8. **No evalúe el límite**.

4. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.



a. $\int_0^2 f(x)dx$ b. $\int_0^5 f(x)dx$ c. $\int_5^7 f(x)dx$ d. $\int_0^9 f(x)dx$

5. Evalúe:

$$\int_{-3}^{0}\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)dx$$

Interpretándola en términos de áreas.

6. Sabiendo que $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$, ¿Cuánto vale $\int_9^4 \sqrt{x}\,dx$?

7. Evalúe $\int_1^1 x^2\,cosx\,dx$

8. Use la información $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1(5-6x^2)dx$.

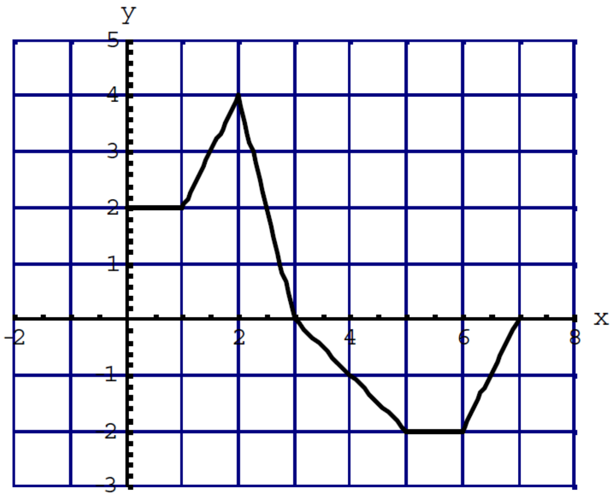
9. Escriba $\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx + \int_6^{12} f(x)\,dx$ como una sola integral de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$

10. Si $\int_2^8 f(x)\,dx = 1{,}7$ y $\int_5^8 f(x)\,dx = 2{,}5$, halle $\int_2^5 f(x)\,dx$.

11. Use las propiedades de las integrales para verificar $\int_0^{\pi/4} sen^3x\,dx \leq \int_0^{\pi/4} sen^2x\,dx$

12. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra en la siguiente página:

    a. Evalúe g(0), g(1), g(2), g(3) y g(6)
    b. ¿Sobre qué intervalos g es creciente? ¿Y decreciente?
    c. ¿Dónde tiene g un valor máximo?
    d. Dibuje la gráfica aproximada de g



13. Confeccione una gráfica del área representada por $g(x) = \int_1^x t^2\, dt$. A continuación, encuentre $g'(x)$ de dos maneras:
   a. Aplicando la parte 1 del Teorema fundamental del Cálculo.
   b. Evaluando la integral con la aplicación de la parte 2 del Teorema fundamental del Cálculo y después, derivando.
14. Use la primera parte del Teorema fundamental del Cálculo para hallar la derivada de la función f en cada caso:

   a. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 2t}\, dt$ b. $f(x) = \int_2^{1/x} \arctan t\ dt$ c. $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt$

   d. $f(x) = \int_2^{sen x} \frac{t}{2+t^2}\, dt$ e. $f(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2)\, dt$ f. $f(x) = \int_{\cos x}^{e^x} t^2\, dt$

   g. $f(x) = \int_2^{\tan x} \arctan t\ dt$, con $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
15. Use la segunda parte del Teorema fundamental del Cálculo para evaluar las siguientes integrales; explique si no existe.

   a. $\int_2^8 (4x + 3)dx$ b. $\int_1^2 \frac{3}{t^4} dt$ c. $\int_3^3 \sqrt{x^5 + 2}\, dx$

   d. $\int_{-4}^2 \frac{2}{x^6} dx$ e. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} sen\ t\ dt$ f. $\int_1^9 \frac{1}{2x} dx$
16. Use una gráfica para dar un estimado preliminar del área de la región por debajo de la curva $y = sen\ x, 0 \leq x \leq \pi$. Luego, encuentre el área exacta.
17. Evalúe las siguientes integrales:
   a. $\int_{-2}^0 (2x - e^x)dx$ b. $\int_0^1 u\left(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}\right)du$ c. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\, dx$
18. Dada la aceleración $a(t) = t + 4$ medida en m/s^2 y la velocidad inicial $v(0) = 5$ de una partícula que se mueve en línea recta. Halle:
   a. La velocidad en el instante t.

b. La distancia recorrida durante en el intervalo de tiempo $[0,10]s$

19. Verifique $\int x\cos x\, dx = x\, sen\, x + \cos x + C$ por derivación

20. Halle la integral indefinida general en cada caso:

a. $\int (x^3 + 6x + 1)dx$ b. $\int \sqrt[3]{x}dx$

c. $\int (1-t)(2+t^2)dt$ d. $\int (3e^u + \sec^2 u)du$

21. Evalúe las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int x^3(1-x^4)^5 dx$ b. $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ c. $\int \cos(2\theta)d\theta$

d. $\int \cos^4 x\, sen\, x\, dx$ e. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ f. $\int x^5\, \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$

g. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$

22. Evalúe las siguientes integrales definidas, en caso de existir:

a. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$ b. $\int_0^{1/2} \frac{sen^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ c. $\int_0^3 \frac{dx}{2x+3}$

d. $\int_0^2 x\, e^{-x^2} dx$ e. $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\, dx$ f. $\int_0^{\pi/4} sen\,(4t)\, dt$

EJERCICIOS ADICIONALES -PARTE A y B

1. Obtenga, sin hacer cálculos: $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\, dx$

2. Determine lo pedido en cada caso:

   a. Halle $f(x)$ tal que $f'(x) = 2(sen\, x)^3 \cos x$ y $f(0) = 3$

   b. Halle $g(x)$ tal que $g'(x) = x\,(sen\, 5x)$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

   c. Halle $h(x)$ tal que $h'(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$ y $h(3) = 0$

3. Sea f una función real derivable. Se sabe que f tiene un punto crítico en $x = 2$, que el gráfico de f pasa por el punto (2,3) y que $f'(x) = -x + a$, para cierto número real a. Halle $f(x)$.

4. Determine los máximos y mínimos locales de la función g definida por:

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2}\, t^2(t-1)(t-4)dt$$