Trabajo Práctico Nº5: Integrales

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I adquiera las nociones básicas de integral definida y su empleo en el cálculo de áreas de regiones. Que sepa reconocer e interpretar la diferencia entre una integral definida e indefinida. Que incorpore y aplique el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, las reglas básicas de integración y las técnicas de integración por sustitución y partes. Que adquiera el concepto de integral impropia y su evaluación. Que el alumno de Cálculo I incorpore y aplique diferentes técnicas de integración según el tipo de integral que se plantee resolver (trigonométricas, por sustitución trigonométrica, de funciones racionales).

NOTA AL ESTUDIANTE: los ejercicios destacados "en negrita" son aquellos a desarrollar por el docente en las clases prácticas. El resto de los ejercicios, como así también los propuestos como extra-áulicos deben ser resueltos en forma completa por el estudiante. Las dudas pueden ser consultadas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta. Se recomienda, además, disponer de alguna herramienta que permita comparar los resultados obtenidos en el desarrollo "manual" de cada ejercicio.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

ANTIDERIVADAS

1. Determine la **antiderivada** más general de cada una de las siguientes funciones (compruebe su respuesta mediante diferenciación).

   a. $g(x) = 6x^2 - 8x + 3$

   b. $g(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

   c. $f(t) = 3\cos(t) - 4\,sen(t))$

   d. $m(t) = -\,cos((2t) + sen(5t) - \,x^4$

2. **Encuentre la antiderivada F de la función f dada por $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, que satisfaga la condición $f(0) = 4$. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de f y F.**

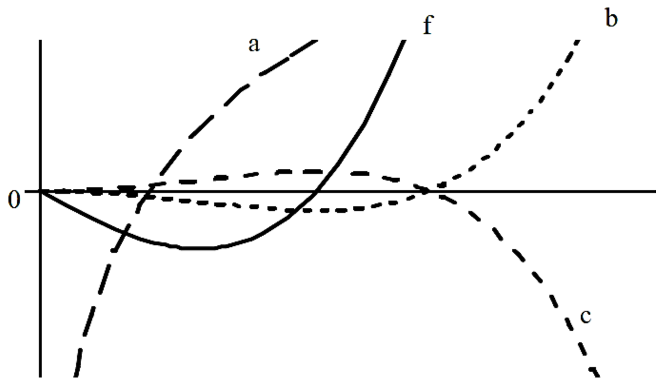
3. Halle la función f con la información que se brinda en cada caso:

   a. $f''(x) = 6x + 12x^2$

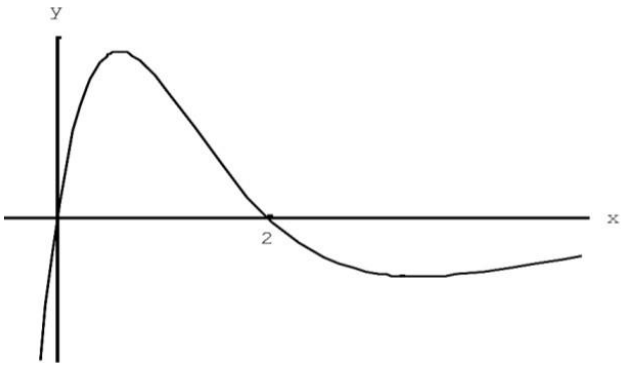
   b. $f'''(t) = e^t$

   c. $\boldsymbol{f''(x) = x, f(0) = -3, f'(0) = 2}$

4. **Se muestra la gráfica de una función f. ¿Cuál de las gráficas es la antiderivada de f y por qué?**



5. A continuación, se presenta la gráfica de una función f. Bosqueje la gráfica de la antiderivada F, si $F(0) = 0$.



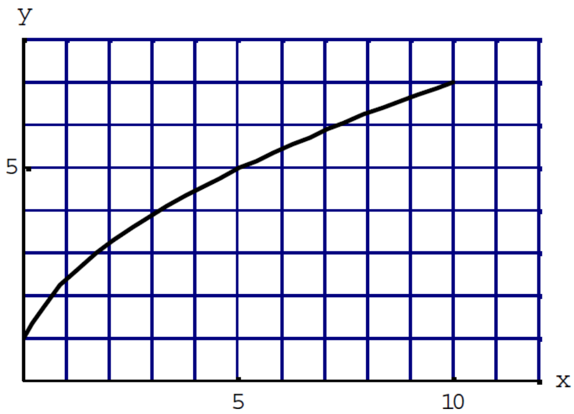
6. Un punto material se mueve de acuerdo con las ecuaciones dadas en cada caso. Encuentre la expresión de su posición en función del tiempo, $s(t)$:

   a. $v(t) = sen(t) - cos(t), s(0) = 0$

   b. $a(t) = t - 2, s(0) = 1, v(0) = 3$

INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN: DESCOMPOSICIÓN Y SUSTITUCIÓN

7. Dada la siguiente gráfica de la función f:



   a. Lea los valores a partir de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área bajo esa gráfica dada de f, desde $x = 0$ hasta $x = 10$. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.

   b. Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos en cada caso.

8. **Sea f la función dada por $f(x) = 1/x$.**

   Estime el área bajo la gráfica de f desde $x = 1$ hasta $x = 5$ con cuatro rectángulos de aproximación y tomando extremos derechos. Bosqueje la gráfica y los rectángulos ¿Se trata de una subestimación (suma inferior) o una sobreestimación (suma superior)?

9. Use la definición de área de una región, como límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, con el fin de encontrar una expresión para área bajo la gráfica de f dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ entre $x = 0$ y $x = 8$. **No evalúe el límite**.

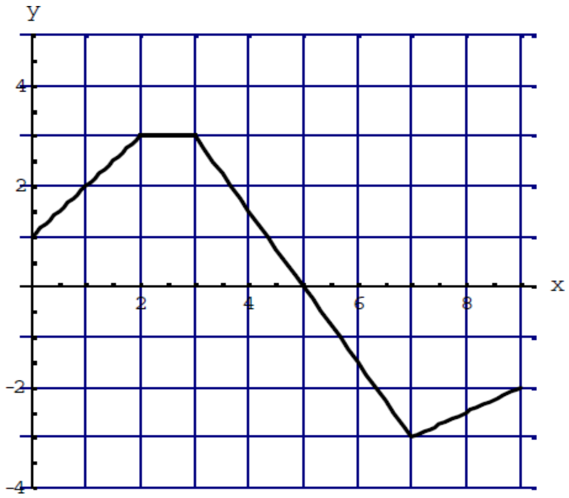
10.Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

a. $\int_0^2 f(x)dx$

b. $\int_0^5 f(x)dx$

c. $\int_5^7 f(x)dx$

d. $\int_0^9 f(x)ds$



11. **Evalúe:** $\int_{-3}^{0} \left(1+\sqrt{9-x^2}\right) dx$**, interpretándola en términos de áreas.**

12. **Sabiendo que:** $\int_4^9 \sqrt{x}dx = \frac{38}{3}$ **¿Cuánto vale** $\int_4^9 \sqrt{x}dx$**?**

13. Evalúe $\int_1^1 x^2 \cos(x)\, dx$.

14. **Dada:** $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ **emplee las propiedades de las integrales para evaluar:**$\int_0^1 (5-6x^2)dx$.

15. Escriba $\int_1^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx + \int_6^{12} f(x)dx$ como una sola integral de la forma $\int_a^b f(x)dx$.

16. Si $\int_2^8 f(x)dx = 1{,}7$ y $\int_5^8 f(x)dx = 2{,}5$, halle $\int_2^5 f(x)dx$.

17. **Use las propiedades de las integrales para verificar** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^3(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^2(x)dx$.

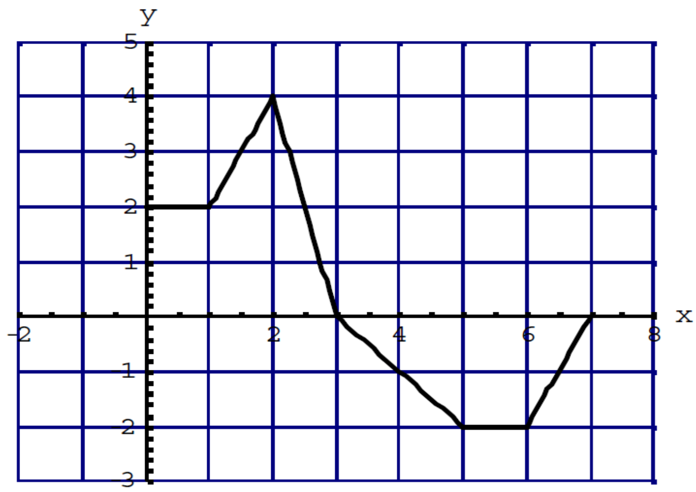
18. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ donde f es la función cuya gráfica se muestra a continuación:

   a. Evalúe $g(0), g(1), g(2), g(3)$ y $g(6)$

   b. ¿Sobre qué intervalos g es creciente? ¿Y decreciente?

   c. ¿Dónde tiene g un valor máximo?

   d. Dibuje la gráfica aproximada de g.



19. **Confeccione una gráfica del área representada por** $g(x) = \int_1^x t^2 dt$ **. A continuación, encuentre** $g'(x)$ **de dos maneras:**

a. **Aplicando la parte 1 del Teorema fundamental del Cálculo.**

b. **Evaluando la integral con la aplicación de la parte 2 del Teorema fundamental del Cálculo y después, derivando.**

20. Use la primera parte del Teorema fundamental del Cálculo para hallar la derivada de la función f en cada caso:

a. $\boldsymbol{f(x) = \int_0^x \sqrt{(1+2t)}\,dt}$ b. $f(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} \arctan(t)\,dt$ c. $\boldsymbol{f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,dt}$

d. $f(x) = \int_2^{senx} \frac{t}{2+t^2}\,dt$ e. $\boldsymbol{f(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2)\,dt}$ f. $f(x) = \int_{cosx}^{e^x} t^2\,dt$

g. $\boldsymbol{f(x) = \int_2^{tanx} \arctan(t)\,dt}$ $con\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

21. Use la segunda parte del Teorema fundamental del Cálculo para evaluar las siguientes integrales; explique si no existe.

a. $\int_2^8 (4x+3)\,dx$ *b.* $\boldsymbol{\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt}$ *c.* $\int_3^3 \sqrt{x^5+2}\,dx$

d. $\boldsymbol{\int_{-4}^2 \frac{2}{x^6}\,dx}$ *e.* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} sen(t)\,dt$ *f.* $\int_1^9 \frac{1}{2x}\,dx$

22. Use una gráfica para dar un estimado preliminar del área de la región por debajo de la curva $y = sen\,x$, $0 \leq x \leq \pi$. Luego, encuentre el área exacta.

23. Evalúe las siguientes integrales **definidas.** Indique la(s) reglas y técnica (s) utilizadas.

a. $\int_{-2}^0 (2x - e^x)\,dx$ ***b.*** $\boldsymbol{\int_0^1 u\left(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}\right) du}$ ***c.*** $\boldsymbol{\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx}$

24. **Dada la aceleración $\boldsymbol{a(t) = t + 4}$ medida en $\boldsymbol{m/s^2}$ y la velocidad inicial $\boldsymbol{v(0) = 5}$ de una partícula que se mueve en línea recta. Halle:**

a. **La velocidad en el instante $\boldsymbol{t}$.**

b. **La distancia recorrida durante en el intervalo de tiempo $\boldsymbol{[0, 10]s}$**

25. Verifique $\int x \cos x\,dx = x\,sen\,x + \cos x + C$ por derivación.

26. Halle la integral **indefinida** general en cada caso. Indique la(s) reglas y técnica (s) utilizadas.

a. $\int (x^3 + 6x + 1)\,dx$ b. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ c. $\int (1 - t)(2 + t^2)\,dt$

d. $\int (3e^u + sec^2 u)\,du$ **e.** $\boldsymbol{\int x^3 (1-x^4)^5\,dx}$ f. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

g. $\boldsymbol{\int \cos(2\theta)\,d\theta}$ **h.** $\boldsymbol{\int \cos^4(x)\,sen\,(x)\,dx}$ i. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

j. $\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$ **k.** $\boldsymbol{\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx}$

27. Evalúe las siguientes integrales **definidas**, en caso de existir. Indique la(s) reglas y técnica (s) utilizadas.

a. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ **b.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ c. $\int_0^3 \frac{dx}{2x+3}$

d. $\int_0^2 x\,e^{-x^2}dx$ *e.* $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$ *f.* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen(4t)dt$

INTEGRALES IMPROPIAS QUE SE RESUELVEN POR APLICACIÓN DE REGLAS DE INTEGRACIÓN O POR MÉTODOS DE SUSTITUCIÓN O PARTES.

28. Explique por qué son impropias cada una de las integrales que se presentan a continuación. Determine cuáles son convergentes y cuáles divergentes.

a. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}dx$ **b.** $\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2}dx$ **c.** $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ d. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN: DESCOMPOSICIÓN Y SUSTITUCIÓN. INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS. SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS. INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES. INTEGRALES IMPROPIAS.

29. Pruebe que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

30. **Demuestre, usando la definición de integral definida, que:** $\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}$

31. Evalúe cada una de las siguientes integrales. Indique la(s) reglas y técnica (s) utilizadas.

a. $\int x\,e^{2x}\,dx$ b. $\int (\ln x)^2\,dx$ c. $\int e^{2\theta}\,sen\,(3\theta)\,d\theta$

d. $\int cos\,(lnx)\,dx$ e. $\int sen\left(\sqrt{x}\right)dx$

32. Calcule el área de la región limitada por las siguientes funciones: $y = arcsen\,(x); y = 0; x = 0{,}5.$

33. Evalúe cada una de las siguientes integrales trigonométricas.

a. $\int sen^3(x)\cos^2(x)\;dx$ b. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} sen^5(x)\cos^3(x)\,dx$ **c.** $\int_0^{\pi/2} sen^2(3x)\,dx$

d. $\int \cos^4(t)\,dt$ **e.** $\int \frac{1-sen\,(x)}{\cos(x)}\,dx$ f. $\int \tan^2(x)\;dx$

g. $\int_0^{\pi/4} \tan^4(t)\sec^2(t)\;dt$ h. $\int sen\,(5x)\,sen\,(2x)\,dx$

34. Evalúe cada una de las siguientes integrales empleando sustitución trigonométrica.

a. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+16}}$ **b.** $\int \sqrt{1-4x^2}dx$ c. $\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}dx$

d. $\int \sqrt{5+4x-x^2}dx$ **e.** $\int_0^a \frac{dt}{(a^2+t^2)^{3/2}}$ $\boldsymbol{con\ a > 0}$

35. Evaluar las siguientes integrales de funciones racionales por medio de fracciones parciales.

a. $\int \frac{3}{(2x+3)(x-1)} dx$d **b.** $\int \frac{1}{x^4-x^3} dx$ **c.** $\int \frac{5x+1}{(x-1)^2} dx$

d. $\int \frac{x^2}{x+1}\, dx$ e. $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2} dx$ f. $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)} dx$

g. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$ **h.** $\int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)} dx$

36. Dada la integral $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$, realice una sustitución para expresar el integrando como una función racional y luego evalúe la integral.

37. Explique por qué son impropias cada una de las integrales que se presentan a continuación. Señale si son convergentes o divergentes. Evalúe las convergentes:

a. $\int_1^\infty x^4 e^{-x^4} dx$ **b.** $\int_0^{\pi/2} \sec(x)\, dx$ c. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}} dw$

d. $\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6} dx$ e. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+5} dx$ f. $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

38. **Aplique el teorema de comparación para determinar si la integral $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{1+x^2}\, dx$ es convergente o divergente.**

39. Calcule, si es posible, $\int_2^\infty \frac{1}{(x+3)^2} dx$ e indique qué representa.

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

Cálculo/ Elementos

40. Obtenga, sin hacer cálculos: : $\int_{-1}^1 x^3\sqrt{1-x^2}\, dx$

41. Compruebe con un gráfico que: : $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx$

42. Verifique, estudiando al menos 3 ejemplos que, si f es integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

43. Determine lo solicitado en cada caso:

a. Halle $f(x)$ tal que $f'(x) = 2(sen\,(x))^3 \cos(x)$ y $f(0) = 3$

b. Halle $f(x)$ tal que $g'(x) = x\,(sen\,5x)$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

c. Halle $h(x)$ tal que $h'(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$ y $h(3) = 0$

44. Sea f una función de variable real derivable. Se sabe que f tiene un punto crítico en $x = 2$, que el gráfico de f pasa por el punto (2,3) y que $f'(x) = -x + a$, para cierto número real a. Halle $f(x)$

45. Determine los máximos y mínimos locales de la función g definida por:

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)\,(t-4)dt$$

Cálculo

46. Halle el área bajo la curva de la función f dada por $f(x) = \frac{-3x+2}{x^2-3x}$ entre $x = 2$ y $x = 4$.

47. Calcule el área de la región bajo la curva $y = \frac{x+1}{x-1}$, desde $a = 2$ hasta $b = 3$.

48. Evalúe cada una de las siguientes integrales. Indique la(s) regla(s) y técnica(s) de integración empleadas.

a. $\int_0^1 t\, e^{-t}\, dt$

b. $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$

c. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sen^5(x) \cos^3(x)\, dx$

d. $\int_0^{\pi/4} \tan^4(t) \sec^2(t)\ dt$

e. $\int sen\,(5x)\, sen\,(2x)\, dx$

f. $\int_0^{\infty} \cos(x)\, dx$

g. $\int \frac{x^3}{x^2-x} dx$

h. $\int \frac{2x^3+1}{x^2-4} dx$

49. Calcule el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^3}$, de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela cuando $t = 10, 100$ y 1000. A continuación, determine el área total bajo esta curva, para $x \geq 1$.

50. Bosqueje la región $S = \{(x,y)/x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$ y calcule su área (si esta es finita).