Trabajo Práctico N°6: Aplicaciones de las Integrales

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I aplique los conceptos aprendidos en integración para el cálculo de área entre curvas, volúmenes, volúmenes de sólidos de revolución y longitud de arco de curva. Que incorpore y aplique según convenga distintos métodos de cálculo de volúmenes de revolución (método de discos, arandelas y casquillos cilíndricos). Que el alumno de Cálculo I sea capaz de calcular el área de superficie de un sólido de revolución. Que adquiera las nociones básicas de ecuaciones diferenciales.

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.
Se recomienda, además, disponer de alguna herramienta que permita comparar los resultados obtenidos en el desarrollo "manual" de cada ejercicio, por ejemplo, Geogebra para 3D.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

ÁREA ENTRE CURVAS

1. En cada uno de los siguientes casos, esquematice la región encerrada por las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y, dibuje un rectángulo típico de aproximación y marque su ancho y altura. A continuación, halle el área de la región.
   a. $y = x$, $y = x^2$
   b. $y^2 = x$, $x - 2y = 3$
   c. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 6$
   d. Para las curvas del punto c., repita el procedimiento integrando respecto a la otra variable y compruebe el resultado

2. Dada la función $f(x) = sen(x)$
   a. Calcule la integral definida $\int_0^{2\pi} f(x)dx$
   b. Encuentre el área de la región acotada por $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2\pi]$.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

3. En cada uno de los siguientes casos, encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región limitada por las curvas alrededor del eje especificado. Trace un <u>esquema de la región</u>, <u>del sólido y de un disco, anillo o casquillo típico</u> (según el método a utilizar).

   a. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$, alrededor del eje 'x'
   b. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$, alrededor de la recta $y = -1$
   c. $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $y = 2$, alrededor de la recta $y = 1$
   d. $y^2 = x$, $x = 2y$, alrededor del eje 'y'
   e. $y^2 = x$, $x = 2y$, alrededor de la recta $x = 4$

f. $y = 9 - x^2$, $x = 2$, $y = 0$, $x = 3$, alrededor del eje 'y'

VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

4. Calcule el valor medio de las siguientes funciones dadas en el intervalo correspondiente:

   a. $f(x) = \cos(2x)$, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ b. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, en el intervalo $[\pi, 3\pi]$

5. Sea $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo [0 , 2]
   a. Calcule el valor promedio de la función en el intervalo dado.
   b. Halle un valor c en el intervalo tal que $f(c)$ sea el valor medio de la función en dicho intervalo.
   c. Trace la gráfica de f y un rectángulo cuya área sea igual a la que está bajo la gráfica de f en el intervalo.

LONGITUD DEL ARCO DE CURVA

6. Calcule la longitud del arco de la curva $y^2 = (x-1)^3$, desde el punto A(1,0) hasta el punto B(2,1)

7. Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = 2x^{3/2}$ con el punto inicial $P_0(1,2)$

NOCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

8. Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.
   a. Demuestre que $y = 2 + e^{-x^3}$ es solución de la ecuación diferencial $y' + 3x^2y = 6x^2$
   b. Compruebe que $y = \frac{2+lnx}{x}$ es una solución del problema con valor inicial:
   $$\begin{cases} x^2y' + xy = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
   c. ¿Para cuáles valores de r la función $y = e^{rt}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = 0$

9. Muestre que $y = x - x^{-1}$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 2x$.

10. La razón a la que un elemento radiactivo decae en un tiempo cualquiera se sabe que es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si N es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t, entonces la tasa de decaimiento está dada por:
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$
Demuestre que la siguiente la función $N = N_0e^{-\lambda t}$ es solución de la ecuación diferencial dada.

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

11. Una esfera de radio r es cortada por un plano situado h unidades sobre el ecuador $0 \leq h < r$. Halle el volumen de la porción de la esfera que queda sobre el plano.

12. Un operario taladra un orificio cilíndrico de radio r a través del centro de una esfera de metal de radio R. Determine el volumen del anillo resultante.

ÁREA DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

13. Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva $y = x^3$, con $0 \leq x \leq 2$, en torno al eje 'x'.

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

El trabajo W realizado por una fuerza variable $F(x)$ en la dirección del movimiento a lo largo del eje 'x' desde $x = a$ hasta $x = b$ es $W = \int_a^b F(x)dx$

14. La *Ley de Hooke* establece que la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud, a partir de su longitud natural (sin comprimir), es proporcional a x, es decir: $F(x) = kx$, donde k es una constante característica del resorte, medida en unidades de fuerza por unidad de longitud. Determine el trabajo W requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 10 cm a una longitud de 7 cm, si la constante es $k = 0{,}3\ kgf/cm$

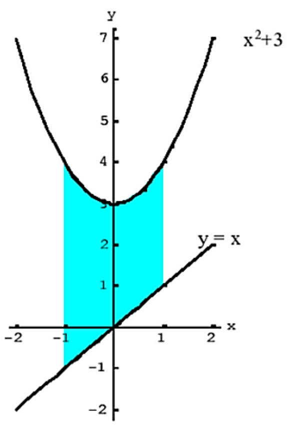
15. En una obra en construcción, un albañil eleva un balde de mezcla de 10kg desde el suelo hasta 5 metros de altura, tirando del mismo con una soga a una velocidad constante. La soga pesa $0{,}4\ kg/m$. ¿Cuánto trabajo realizó para subir el balde y la cuerda?

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

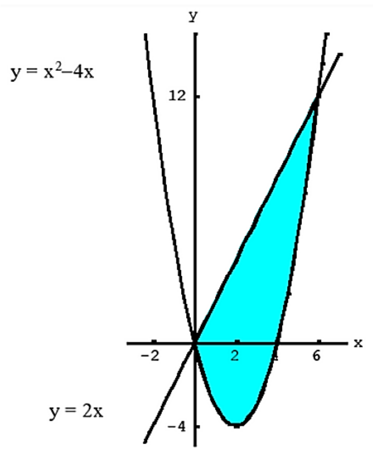
Comunes a Cálculo/Elementos

1. Encuentre el área de la región sombreada en cada caso:

a.



b.



2. En cada uno de los siguientes casos, esquematice la región encerrada por las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y, dibuje un rectángulo típico de aproximación y marque su ancho y altura. A continuación, halle el área de la región.

   a. $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$
   b. $y = x + 1$, $y = (x-1)^2$
   c. $y = x$, $x = 2$, $y = 1/x^2$, $y = 0$

3. En cada uno de los siguientes casos, encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región limitada por las curvas alrededor del eje especificado. Trace un esquema de la región, del sólido y de un disco, anillo o casquillo típico (según el método a utilizar).

   a. $y = x^2$, $y^2 = x$, alrededor del eje 'x'
   b. $y = x^2$, $y^2 = x$, alrededor de la recta $y = -2$
   c. $y = x$, $y = \sqrt{x}$, alrededor de la recta $y = 1$
   d. $y = 3(2 - x)$, $x = 0$, $y = 0$, alrededor del eje 'y'
   e. $y = 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$, $x = 2$, $x = 3$, alrededor de $x = 1$
   f. $y = x^2 + 1$, $x = 2$, $y = 1$, alrededor de $x = 3$ y de $x = -3$

4. Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje 'x' la región limitada por las curvas: $y = lnx$, $y = 1$, $x = 1$.

5. Calcule el valor medio de las siguientes funciones dadas en el intervalo correspondiente:

   a. $f(x) = \frac{1}{x}$, en el intervalo [1 , 4]
   b. $f(x) = \cos(x)$, en el intervalo $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

6. Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo [0 , 2]

   a. Calcule el valor promedio de la función en el intervalo dado.
   b. Halle un valor c en el intervalo tal que $f(c)$ sea el valor medio de la función en dicho intervalo.
   c. Trace la gráfica de f y un rectángulo cuya área sea igual a la que está bajo la gráfica de f en el intervalo.

7. Determine la longitud del arco de la curva en cada caso:

   a. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$
   b. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, $1 \leq x \leq 3$

8. Establezca, pero no evalúe, una integral para calcular la longitud de la curva $y = e^x\cos(x)$ con $0 \leq x \leq \pi/2$.

9. Demuestre que $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$.

10. Compruebe que $y = -t\cos(t) - t$ es una solución del problema con valores iniciales:

$$t\frac{dy}{dt} = y + t^2 sen\,(t), y(\pi) = 0$$

11. En una zona que tiene una capacidad de soportar una población de 4000 alces, la tasa de crecimiento de la misma está dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}194\, p\left(1 - \frac{p}{4000}\right)$$

¿Es cierto que la siguiente función que modela la población de alces $p = \frac{4000}{1+99\, e^{-0{,}194t}}$ es solución de la ecuación diferencial dada?

12. La caída de un objeto de masa m considerando la resistencia del aire está dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$$

Demuestre que la siguiente función que da la velocidad de caída en función del tiempo: $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ (suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la misma) es solución de la ecuación diferencial dada.

13. a. Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?

    b. ¿Si r1 y r2 son los valores de r que encontró en el inciso a, demuestre que todo integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ también es una solución.

Ejercicios adicionales Cálculo

14. Deduzca, pero no evalúe, una integral para el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar las curvas indicadas en torno al eje dado:

    a. $y = lnx$, $1 \leq x \leq 3$, eje 'x'

    b. $y = \sec(x)$, $0 \leq x \leq \pi/4$, eje 'y'

15. Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva $y = \sqrt[3]{x}$, con $1 \leq x \leq 2$, en torno al eje 'y'.

16. Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva $y = senx$, con $0 \leq x \leq \pi$, en torno al eje 'x'.

17. Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $A = 4\pi r^2$.

18. Demuestre que el área de la superficie lateral de un cono circular recto de altura h cuya base es una circunferencia de radio r, es $A = \pi r(r^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$.