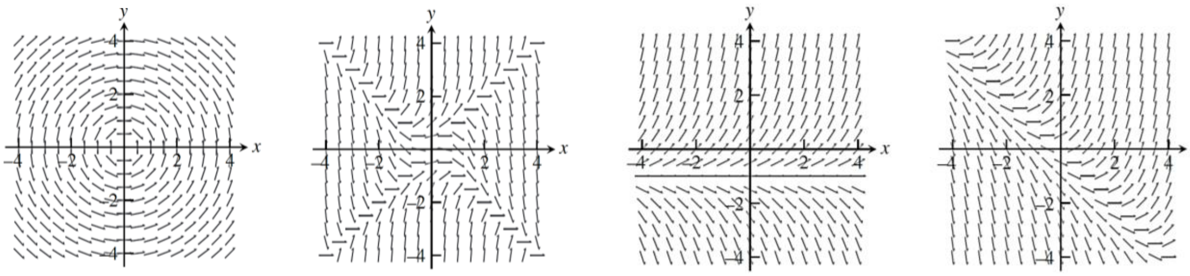
Trabajo Práctico Nº7: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I incorpore las nociones básicas de ecuaciones diferenciales. Que pueda reconocer la forma general de una ecuación diferencial general de primer orden, que pueda determinar si una familia de curvas dadas es solución de una ecuación diferencial, y que pueda hallar la curva solución particular bajos condiciones iniciales dadas. Que logre identificar una ecuación diferencial de primer orden lineal, la lleve a su forma estándar y encuentre su solución. Que se interiorice acerca de las distintas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

1. Relacione cada ecuación diferencial con su campo direccional, eligiendo entre las gráficas que aparecen a continuación.



(a) (b) (c) (d)

i. $y' = x + y$ ii. $y' = y + 1$ iii. $y' = -\frac{x}{y}$ iv. $y' = y^2 - x^2$

2. Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.
   a. Demuestre que $y = 2 + e^{-x^3}$ es solución de la ecuación diferencial $y' + 3x^2y = 6x^2$
   b. Compruebe que $y = \frac{2+lnx}{x}$ es una solución del problema con valor inicial:
   $$\begin{cases} x^2y' + xy = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
   c. ¿Para cuáles valores de r la función $y = e^{rt}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = 0$

3. Muestre que $y = x - x^{-1}$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 2x$.

4. La razón a la que un elemento radiactivo decae en un tiempo cualquiera se sabe que es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si N es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t, entonces la tasa de decaimiento está dada por:
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$
Demuestre que la siguiente la función $N = N_0e^{-\lambda t}$ es solución de la ecuación diferencial dada.

5. En una zona que tiene una capacidad de soportar una población de 4000 alces, la tasa de crecimiento de la misma está dada por la ecuación diferencial:

$\frac{dp}{dt} = 0{,}194\, p\left(1 - \frac{p}{4000}\right)$

¿Es cierto que la siguiente función que modela la población de alces

$$p = \frac{4000}{1 + 99\, e^{-0{,}194t}}$$

es solución de la ecuación diferencial dada?

6. La caída de un objeto de masa m considerando la resistencia del aire está dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$$

Demuestre que la siguiente función que da la velocidad de caída en función del tiempo: $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ (suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la misma) es solución de la ecuación diferencial dada.

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales (encuentre la familia de soluciones)

   a. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ b. $(x^2 + 1)y' = xy$ c. $y' = y^2 sen\,(x)$ d. $xy^2y' = x + 1$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

   a. $\frac{dy}{dx} + y = e^x\,,\ x > 0$ b. $(1 + x)y' + y = \sqrt{x}$ c. $xy' + 3y = \frac{senx}{x^2}\ , x > 0$

9. Resuelva los siguientes problemas con valor inicial

   a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\ , y(0) = -3$ b. $\frac{dy}{dx} = \frac{lnx}{xy}\ , y(1) = 2$

   c. $t\frac{dy}{dt} + 2y = t^3\ ,\ t > 0,\ \ y(2) = 1$ d. $\theta\frac{dy}{d\theta} + y = sen\theta\ ,\ \theta > 0, y\left(\pi/_2\right) = 1$

10. Una población se modela mediante una ecuación diferencial:

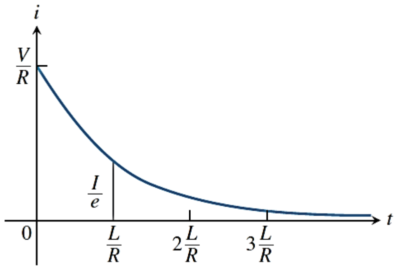
$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

   a. ¿Para qué valores de P la población es creciente?
   b. ¿Para qué valores de P la población es decreciente?
   c. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

11. Corriente en un circuito RL abierto. Si en un circuito RL, el interruptor se abre cuando el circuito alcanza su estado estacionario $I = V/R$ el decaimiento de la corriente satisface la ecuación

$$L\frac{dy}{dt} + Ri = 0$$

En donde el voltaje es cero ($V = 0$).



a. Resuelva la ecuación para expresar i como función de t.
b. ¿Cuánto tiempo después de que se abrió el circuito la corriente caerá a la mitad de su valor original?
c. Demuestre que el valor de la corriente es I/e cuando $t = L/R$.

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

12. Identifique el tipo de ecuación diferencial y resuelva según los métodos aprendidos.

a. $(y^2 + xy^2)y' = 1$ b. $(y + seny)y' = x + x^3$ c. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 1 - \frac{1}{x}, x > 0$

13. Una esfera con radio 1 m tiene temperatura 15ºC. Está dentro de una esfera concéntrica con radio 2 m y temperatura 25º C. La temperatura $T(r)$ a una distancia r desde el centro común de las esferas satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Si se hace que $S = dT/dr$, entonces S satisface una ecuación diferencial de primer orden. Resuelva a fin de hallar una expresión para la temperatura $T(r)$ entre las esferas.

14. Un objeto de masa m se mueve horizontalmente a través de un medio que resiste el movimiento con una fuerza que es una función de la velocidad; es decir,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)$ y $s = s(t)$ representan la velocidad y la posición del objeto en el tiempo t, respectivamente. Por ejemplo, considere un bote que se mueve en el agua.

a. Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, es decir, $f(v) = -kv$, donde k es una constante positiva (este modelo es apropiado para valores pequeños de v). Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que recorre el objeto desde el tiempo $t = 0$?

b. Para valores más grandes de v un mejor modelo se obtiene suponiendo que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$ (Newton fue el primero en proponer este modelo). Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que viaja el objeto en este caso?

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

Cálculo/Elementos de Cálculo

1. Demuestre que $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$.

2. Compruebe que $y = -t\cos(t) - t$ es una solución del problema con valores iniciales:

   $t\frac{dy}{dt} = y + t^2 sen\,(t), y(\pi) = 0.$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

   a. $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{e^y}}$ b. $\frac{dy}{dx} = xy^2$ c. $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$ d. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{xy+x}$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

   a. $e^x\frac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$ b. $2y' = e^{\frac{x}{2}} + y$ c. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

5. Resuelva los siguientes problemas con valor inicial

   a. $\frac{dy}{dt} + 2y = 3,\ y(0) = 1$ b. $\frac{dy}{dx} + xy = x,\ y(0) = -6$

6. Resuelva el problema con valor inicial de crecimiento/decaimiento exponencial para y como función de t, considerando la ecuación diferencial como una ecuación lineal de 1er orden con $P(x) = -k\ y\ Q(x) = 0.$

$$\frac{dy}{dt} = ky\,, \qquad (k\ constante), \qquad y(0) = y_0$$

7. Resuelva el siguiente problema con valor inicial para *u* como función de *t*

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0\,, \qquad (k\ y\ m\ constantes\ positivas), \qquad u(0) = u_0$$

   a. Como una ecuación lineal de primer orden
   b. Como una ecuación separable

8. a. Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?

   b. ¿Si r1 y r2 son los valores de r que encontró en el inciso a, demuestre que todo integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$también es una solución.

9. La cantidad de bacterias en un cultivo controlado después de 3 horas es de 400, y después de 10 horas hay 2000 bacterias. ¿Cuál fue el número inicial de bacterias? (*Se recomienda ver Thomas, Cálculo de una variable,12 ed., pag. 390-391).*

10. Al inicio había una muestra de 100 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la muestra había disminuido un 3%. Si la rapidez de decaimiento es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t, determine la cantidad restante después de 24 hs y su vida media. (*Se recomienda ver Thomas, Cálculo de una variable, 12 ed., pag. 391-392).*

11. La vida media del cobalto radiactivo es de 5,27 años. Suponga que un accidente nuclear ha dejado el nivel de cobalto radiactivo en cierta región, 100 veces por encima del nivel aceptable para la vida humana.

¿Cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable? (ignore la presencia de otros elementos radiactivos). (*Se recomienda ver Thomas, Cálculo de una variable, 12 ed., pag. 391-392)*

Cálculo

12. Identifique el tipo de ecuación diferencial y resuelva según los métodos aprendidos.

    a. $y' + (tanx)y = cos^2x\,, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ b. $x\frac{dy}{dx} = \frac{cosx}{x} - 2y\,, x > 0$ c. $xy' - y = 2xlnx$

13. Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial que se indica

    a. $\frac{du}{dt} = \frac{2t+sec^2t}{2u}\,, u(0) = -5$ b. $\frac{dy}{dx} = \frac{ycos\,x}{1+y^2}, y(0) = 1$ c. $x.\cos(x) = (2y + e^{3y})y', y(0) = 0$

14. Deducción de ecuación.

    a. Demuestre que la solución de la ecuación

    $$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

    Es

    $$i = \frac{V}{R} + Ce^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

    b. Después utilice la condición inicial $i(0) = 0$ para determinar el valor de C.

    Demuestre que $i = \frac{V}{R}$ es una solución de la ecuación $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$ y que $i = Ce^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$ satisface dicha ecuación.

15. Un pote de crema inicialmente a 25°C se va a enfriar colocándolo en una habitación donde la temperatura es 0°C. Si la temperatura descendió 15°C después de 20 minutos, ¿Cuándo estará a 5°C?