Trabajo Práctico Nº7: Inducción Matemática

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I sea capaz de demostrar a través de inducción matemática si ciertos enunciados son válidos para un determinado conjunto numérico.

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.

Para resolver este práctico recuerde:

Principio de inducción finita o principio de inducción matemática: Sea $P(n)$una proposición matemática abierta (o conjunto de proposiciones verdaderas) en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un entero positivo.

a. Si $P(1)$ es verdadera; y

b. Siempre que $P(k)$ sea verdadera (para algún $k \in \mathbb{Z}^+$particular, pero elegido al azar), entonces $P(k+1)$ será verdadera;

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Advertencia: cuando se pretende demostrar que $P(k+1)$ es verdadera se debe tener en cuenta que el i-ésimo término es diferente de la suma de k términos y no se pueden utilizar en forma equivalente. Vamos a explicar esto con un ejemplo:

Dada $P(n) = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$, demostrar que se cumple $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Paso base: $P(1)$: $(2*1-1) = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$ ***se verifica!***

Paso inductivo: $P(k)$: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = 1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2$ *es verdadera*

$P(k+1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = 1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1] = (k+1)^2 \qquad (\mathbf{1})$$

Donde se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + [2(k+1)-1]$$

Término k+1

k primeros términos, se conoce su valor por *HI*.

Por lo tanto, trabajando **sólo** con el lado izquierdo de **(1)**, se agrupan los primeros k términos:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + [2(k+1)-1] = [1+3+5+7+\cdots+(2k-1)] + [2(k+1)-1]$$

Por hipótesis inductiva, se sabe que los primeros k términos son iguales a k^2, luego se opera algebraicamente y se tiene que:

$$k^2 + [2k+2-1] = (k+1)^2$$
$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$
$$(k+1)^2 = (k+1)^2$$

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tener en cuenta que:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) \neq 2i-1$$

El miembro de la izquierda es la suma de los términos que van desde $i=1$ hasta $i=k$ (k términos). El miembro de la derecha es un único término (el i-ésimo). Por lo que no se puede entonces utilizar de modo equivalente al realizar la prueba de inducción y es incorrecto decir en este caso que $2i-1=k^2$.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

Utilice inducción matemática para demostrar que las siguientes relaciones se cumplen para todo $n \in \mathbb{N}_k$ iniciado desde cierto $k \in \mathbb{N}$. Determinar el valor de k.

1. $2+4+6+8+\cdots+2n = n(n+1)$
2. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
5. $1*1!+2*2!+3*3!+\cdots+n*n! = (n+1)!-1$
6. $(1^2+1)*1!+(2^2+1)*2!+\cdots+(n^2+1)*n! = n(n+1)!$
7. n^2+n es par
8. $n(n^2+5)$ es divisible por 6
9. $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible por 9.
10. Sea $f_0=0$, $f_1=1$ y $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ para $n \geq 0$ (sucesión de Fibonacci). Entonces:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

11. $\left(1-\frac{1}{4}\right) * \dots * \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

12. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$

13. $\sum_{i=1}^{n} \frac{i-(i-1)^2}{i!} = 1 + \frac{n-1}{n!}$

14. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}\ \forall\, m, n\ \in\ \mathbb{N}$

15. $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

16. $cos(2\theta) \cdot cos(2^2\theta) \dots cos(2^n\theta) = \frac{sen\ (2^{n+1}\theta)}{2^n sen\ (2\theta)}, \forall\ sen(2\theta) \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$

17. $sen[(k+1)\theta] sen\left(\frac{\theta}{2}\right) + sen\left(\frac{k\theta}{2}\right) sen\ \left[\frac{(k+1)\theta}{2}\right] = sen\ \left[\frac{(k+1)\theta}{2}\right] sen\ \left[\frac{(k+2)\theta}{2}\right]$

18. $2^{2n} - 1$ *es divisible por 3*

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

Cálculo/Elementos

1. $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n-1) = n(2n+1)$
2. $a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + (a+(n-1)d) = \frac{n[2a+d(n-1)]}{2}$
3. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$
4. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \frac{(-1)^n-1}{2}$
5. $1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Cálculo

6. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
7. $sen\ \theta + sen\ (2\theta) + \cdots + sen(n\theta) = \frac{sen\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right] sen\ \left(\frac{1}{2}n\theta\right)}{sen\ \left(\frac{1}{2}\theta\right)}$

Ejercicios "Desafío"

8. $2^n < n! \quad para\, n \geq 4$
9. $2n + 1 < 2^n \; para\, n \geq 3$
10. $3n + 25 < 3^n \; para\, n \geq 4$
11. $2^{n-3} \geq n - 2$
12. $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n}$
13. $|sen(nx)| \leq n|sen(x)|$
14. $n < \frac{n^2-n}{12} + 2$
15. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
16. $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$