Trabajo Práctico Nº8: Inducción Matemática

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I sea capaz de demostrar a través de inducción matemática si ciertos enunciados son válidos para un determinado conjunto numérico.

NOTA AL ESTUDIANTE: los ejercicios destacados "en negrita" son aquellos a desarrollar por el docente en las clases prácticas. El resto de los ejercicios, como así también los propuestos como extra-áulicos deben ser resueltos en forma completa por el estudiante. Las dudas pueden ser consultadas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

Utilice inducción matemática para demostrar que las siguientes relaciones se cumplen para todo $n \in \mathbb{N}_k$ iniciado desde cierto $k \in \mathbb{N}$. Determinar el valor de k.

1. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1)$
2. $\mathbf{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$
5. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$
6. $\mathbf{1 * 1! + 2 * 2! + 3 * 3! + \cdots + n * n! = (n+1)! - 1}$
7. $\mathbf{2^n < n!}$ **para** $\mathbf{n \geq 4}$
8. $\mathbf{2n + 1 < 2^n}$ **para** $\mathbf{n \geq 3}$
9. $3n + 25 < 3^n$ para $n \geq 4$
10. $\mathbf{n^2 + n}$ **es par.**
11. $\mathbf{n(n^2 + 5)}$ **es divisible por 6**
12. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9.
13. $2^{2n} - 1$ es divisible por 3
14. $\mathbf{|sen(nx)| \leq n|sen(x)|}$
15. Sea $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para $n \geq 0$ (sucesión de Fibonacci). Entonces:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

16. $\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} \leq \mathbf{2} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$

17. $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

18. $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}\ \forall\, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

19. $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

20. $\mathbf{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{cos}(\mathbf{2}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}) \ldots \mathbf{cos}(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{sen}\,(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{sen}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{\theta})},\ \forall\ \boldsymbol{sen}(\mathbf{2}\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

21. $\boldsymbol{sen}[(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{\theta}]\boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{k\theta}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{sen}\ \left[\frac{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right] = \boldsymbol{sen}\ \left[\frac{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right]\boldsymbol{sen}\ \left[\frac{(\boldsymbol{k}+\mathbf{2})\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right]$

22. $sen\,\theta + sen\,(2\theta) + \cdots + sen(n\theta) = \frac{sen\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right] sen\left(\frac{1}{2}n\theta\right)}{sen\left(\frac{1}{2}\theta\right)}$

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

Cálculo/Elementos

23. $a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + (a+(n-1)d) = \frac{n[2a+d(n-1)]}{2}$

24. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \frac{(-1)^n-1}{2}$

25. $1*2 + 2*3 + 3*4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

26. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

27. $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n}$

Cálculo

28. $\left(1 - \frac{1}{4}\right) * \ldots * \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

29. $2^{n-3} \geq n - 2$

30. $n < \frac{n^2-n}{12} + 2$