

Trabajo Práctico N°8: Inducción Matemática

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I sea capaz de demostrar a través de inducción matemática si ciertos enunciados son válidos para un determinado conjunto numérico.

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.

Para resolver este práctico recuerde:

Principio de inducción finita o principio de inducción matemática: Sea $P(n)$ una proposición matemática abierta (o conjunto de proposiciones verdaderas) en la que aparece una o varias veces la variable n , que representa a un entero positivo.

- Si $P(1)$ es verdadera; y
- Siempre que $P(k)$ sea verdadera (para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ particular, pero elegido al azar), entonces $P(k + 1)$ será verdadera;

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Advertencia: cuando se pretende demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera se debe tener en cuenta que el i -ésimo término es diferente de la suma de k términos y no se pueden utilizar en forma equivalente. Vamos a explicar esto con un ejemplo:

Dada $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$, demostrar que se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

Paso base: $P(1)$: $(2 * 1 - 1) = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$ **se verifica!**

Paso inductivo: $P(k)$: $\sum_{i=1}^k (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$ es verdadera

$P(k + 1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \quad (1)$$

Donde se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

k primeros términos, se conoce su valor por HI.
Término k+1

Por lo tanto, trabajando **sólo** con el lado izquierdo de (1), se agrupan los primeros k términos:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) + [2(k + 1) - 1] = [1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1)] + [2(k + 1) - 1]$$

Por hipótesis inductiva, se sabe que los primeros k términos son iguales a k^2 , luego se opera algebraicamente y se tiene que:

$$\begin{aligned} k^2 + [2k + 2 - 1] &= (k + 1)^2 \\ k^2 + 2k + 1 &= (k + 1)^2 \\ (k + 1)^2 &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tener en cuenta que:

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) \neq 2i - 1$$

El miembro de la izquierda es la suma de los términos que van desde $i = 1$ hasta $i = k$ (k términos). El miembro de la derecha es un único término (el i -ésimo). Por lo que no se puede entonces utilizar de modo equivalente al realizar la prueba de inducción y es incorrecto decir en este caso que $2i - 1 = k^2$.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

Utilice inducción matemática para demostrar que las siguientes relaciones se cumplen para todo $n \in \mathbb{N}_k$ iniciado desde cierto $k \in \mathbb{N}$. Determinar el valor de k .

- $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$
- $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- $1 * 1! + 2 * 2! + 3 * 3! + \dots + n * n! = (n + 1)! - 1$
- $(1^2 + 1) * 1! + (2^2 + 1) * 2! + \dots + (n^2 + 1) * n! = n(n + 1)!$
- $n^2 + n$ es par
- $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6
- $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ es divisible por 9.
- Sea $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para $n \geq 0$ (sucesión de Fibonacci). Entonces:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

$$11. \left(1 - \frac{1}{4}\right) * \dots * \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$12. \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$13. \sum_{i=1}^n \frac{i-(i-1)^2}{i!} = 1 + \frac{n-1}{n!}$$

$$14. x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$15. 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$$16. \cos(2\theta) \cdot \cos(2^2\theta) \dots \cos(2^n\theta) = \frac{\operatorname{sen}(2^{n+1}\theta)}{2^n \operatorname{sen}(2\theta)}, \quad \forall \operatorname{sen}(2\theta) \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$17. \operatorname{sen}[(k+1)\theta] \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left[\frac{(k+1)\theta}{2}\right] = \operatorname{sen}\left[\frac{(k+1)\theta}{2}\right] \operatorname{sen}\left[\frac{(k+2)\theta}{2}\right]$$

$$18. 2^{2n} - 1 \text{ es divisible por } 3$$

PARTE C: Ejercicios Extra-álculos

Cálculo/Elementos

$$1. 3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = n(2n + 1)$$

$$2. a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + (a + (n - 1)d) = \frac{n[2a + d(n - 1)]}{2}$$

$$3. 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

$$4. (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n = \frac{(-1)^{n-1}}{2}$$

$$5. 1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Cálculo

$$6. 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$7. \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(2\theta) + \dots + \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}n\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}$$

Ejercicios “Desafío”

8. $2^n < n!$ para $n \geq 4$

9. $2n + 1 < 2^n$ para $n \geq 3$

10. $3n + 25 < 3^n$ para $n \geq 4$

11. $2^{n-3} \geq n - 2$

12. $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n}$

13. $|\text{sen}(nx)| \leq n|\text{sen}(x)|$

14. $n < \frac{n^2-n}{12} + 2$

15. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

16. $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$