

Trabajo Práctico N°8: Sucesiones y Series Numéricas

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I incorpore las nociones básicas de sucesiones y series. Que determine mediante método gráfico y analítico el valor al cual converge una sucesión. Que aplique los conceptos de límites para la determinación de límites de sucesiones y que pueda determinar si una sucesión es monótona, no creciente o no decreciente o ninguna. Que el estudiante de Elementos de Cálculo I incorpore las nociones básicas de Series y criterios de análisis de convergencia, que identifique una serie geométrica y pueda calcular cuando corresponda, su suma. Que el alumno de Cálculo I profundice sobre las nociones de Series y los distintos criterios de análisis de convergencia y que pueda identificar distintos tipos de series (geométrica, armónica, telescópica, alternante, etc.).

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

1. Defina qué es una sucesión.

2. Dadas las siguientes sucesiones:

i. $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 0$

ii. $b_n = \frac{1-2n}{n^2}, n \geq 1$

iii. $c_n = 3 + 5n, n \geq 1$

a. Grafique los primeros 8 términos de la sucesión

b. Indique, a través de la observación de la gráfica anterior, a qué valor converge y pruebe utilizando definición de límite, que dicho valor es correcto.

3. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2n} + \frac{3}{3n^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(-\pi)^n}{5^n} + 3^{n/2} \right]$

4. Calcule el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ estudie la monotonía y grafique los primeros 5 términos para cada una de las siguientes sucesiones:

a. $a_n = \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$

b. $b_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$

c. $c_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

5. Enuncie el teorema del Encaje o Sandwich y calcule el límite de las siguientes sucesiones:

a. $a_n = \frac{\text{sen}(n)}{n}$

b. $b_n = \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1}$

6. ¿Es verdad que una sucesión $\{a_n\}$ de números positivos tiene que converger si está acotada superiormente? Justifique su respuesta.

7. Defina qué es una serie y en qué se diferencia con una sucesión.

8. Para las series:

i. $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

- a. Identifique y enuncie qué nombre recibe la serie.
- b. Calcule la expresión general de la sucesión de sumas parciales.
- c. Calcule, si existe, la suma de cada serie.

9. Utilizando el ejercicio anterior, indique si las siguientes series convergen o divergen. Si convergen, calcule su suma:

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

10. Enuncie la condición necesaria de convergencia y luego analice si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4n^2 + 2}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2+2)n!}{(n+2)!}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+12}{2^n}$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

11. Demuestre que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

12. Enuncie el criterio del cociente y analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot n!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

13. Enuncie el criterio de la raíz y analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

14. Probar el teorema de valor absoluto: Dada la serie a_n , si: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

15. Enuncie el teorema de convergencia absoluta y condicional, y analice la convergencia de las siguientes series y diga si converge de forma absoluta o condicional:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

16. Enuncie el criterio de la integral y analice la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p, p \in \mathbb{R}$$

17. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{10n^2+5n+3}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

Cálculo/Elementos de Cálculo

1. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso.

d. $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$

e. $b_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

f. $c_n = \frac{n+3}{n^2+5n+6}$

g. $d_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$

h. $e_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

i. $f_n = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right)$

2. Identifique cuál de las siguientes son series geométricas y cuál telescópica. Luego determine si convergen o divergen. En caso de que converjan calcule su suma.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2} \right)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

Cálculo

3. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$