Cálculo I

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TRABAJO PRÁCTICO 8: SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

1. Dadas las siguientes sucesiones:

   $i.\, a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 0$ ii. $b_n = \frac{1-2n}{n^2}, n \geq 1$ iii. $c_n = 3 + 5n, n \geq 1$

   a. Grafique los primeros 8 términos de la sucesión

   b. Indique, a través de la observación de la gráfica anterior, a qué valor converge y pruebe utilizando definición de límite, que dicho valor es correcto.

2. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso.

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2n} + \frac{3}{3n^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(-\pi)^n}{5^n} + 3^{n/2}\right]$

3. Calcule el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ estudie la monotonía y grafique los primeros 5 términos para cada una de las siguientes sucesiones:

   a. $a_n = \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$

   b. $b_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$

   c. $c_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$

   d. $d_n = \left(\frac{2n-3}{2n+4}\right)^{\frac{n^2-2n}{n+1}}$

4. Enuncie el teorema del encaje o Sandwich y calcule el límite de las siguientes sucesiones:

   a. $a_n = \frac{sen(n)}{n}$

   b. $b_n = \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1}$

5. Probar el teorema de valor absoluto: Dada la serie a_n, si: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

6. Para las series:

   i. $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ (serie geométrica) ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (serie telescópica)

   a. Calcule la expresión general de la sucesión de sumas parciales.

b. Calcule, si existe, la suma de cada serie.

7. Utilizando el ejercicio anterior, indique si las siguientes series convergen o divergen. Si convergen, calcule su suma:

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ b. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$

8. Enuncie la condición necesaria de convergencia y luego analice si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{4n^2+2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2+2)n!}{(n+2)!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+12}{2^n}$

9. Enuncie el criterio de la integral y analice la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^p, p \in \mathbb{R}$$

10. Enuncie el criterio de comparación directa y en el límite. Luego analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n)}{n^2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(n+1)}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

11. Enuncie el teorema de convergencia absoluta y condicional, y analice la convergencia de las siguientes series y diga si converge de forma absoluta o condicional:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

12. Enuncie el criterio del cociente y analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{3^n \cdot n!}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

13. Enuncie el criterio de la raíz y analice la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

14. Defina serie de potencia e indique su intervalo de convergencia.

15. Analice el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencia:

a. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ c. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n \cdot \sqrt{n}}$