Trabajo Práctico Nº9: Sucesiones y Series Numéricas

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I incorpore las nociones básicas de sucesiones y series. Que determine mediante método gráfico y analítico el valor al cual converge una sucesión. Que aplique los conceptos de límites para la determinación de límites de sucesiones y que pueda determinar si una sucesión es monótona, no creciente o no decreciente o ninguna. Que el estudiante de Elementos de Cálculo I incorpore las nociones básicas de Series y criterios de análisis de convergencia, que identifique una serie geométrica y pueda calcular cuando corresponda, su suma. Que el alumno de Cálculo I profundice sobre las nociones de Series y los distintos criterios de análisis de convergencia y que pueda identificar distintos tipos de series (geométrica, armónica, telescópica, alternante, etc.).

NOTA AL ESTUDIANTE: los ejercicios destacados "en negrita" son aquellos a desarrollar por el docente en las clases prácticas. El resto de los ejercicios, como así también los propuestos como extra-áulicos deben ser resueltos en forma completa por el estudiante. Las dudas pueden ser consultadas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

1. Dadas las siguientes sucesiones:

   i. $\boldsymbol{a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 0}$ **ii.** $\boldsymbol{b_n = \frac{1-2n}{n^2}, n \geq 1}$ iii. $c_n = 3 + 5n, n \geq 1$

   a. Grafique los primeros 8 términos de la sucesión
   b. Indique, a través de la observación de la gráfica anterior, a qué valor converge y pruebe utilizando definición de límite, que dicho valor es correcto.

2. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso.

   a. $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n} + \frac{3}{3n^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$

   b. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-\pi)^n}{5^n} + 3^{n/2}\right]$

3. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} a_n$ estudie la monotonía y grafique los primeros 5 términos para cada una de las siguientes sucesiones:

   a. $a_n = \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$

   b. $\boldsymbol{b_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}}$

   c. $c_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$

   d. $\boldsymbol{d_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n}$

4. **Enuncie el teorema del Encaje o Sandwich y calcule el límite de las siguientes sucesiones:**

   a. $\boldsymbol{a_n = \frac{sen(n)}{n}}$

   b. $\boldsymbol{b_n = \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1}}$

5. **Para las series:**

   i. $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} ar^n}$ ii. $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}$

   a. **Identifique y enuncie qué nombre recibe la serie.**

   b. **Calcule la expresión general de la sucesión de sumas parciales.**

   c. **Calcule, si existe, la suma de cada serie.**

6. Utilizando el ejercicio anterior, indique si las siguientes series convergen o divergen. Si convergen, calcule su suma:

   a. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

7. Enuncie la condición necesaria de convergencia y luego analice si las siguientes series convergen o divergen:

   a. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4n^2+2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2+2)n!}{(n+2)!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+12}{2^n}$

8. Enuncie el criterio de comparación directa y en el límite. Luego analice la convergencia de las siguientes series:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(n+1)}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

9. Enuncie el criterio del cociente y analice la convergencia de las siguientes series:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot n!}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$

10. Enuncie el criterio de la raíz y analice la convergencia de las siguientes series:

    a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

11. Probar el teorema de valor absoluto: Dada la serie a_n, si: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

12. Enuncie el teorema de convergencia absoluta y condicional, y analice la convergencia de las siguientes series y diga si converge de forma absoluta o condicional:

    a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$ **b.** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}}$ **c.** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}}$

13. **Enuncie el criterio de la integral y analice la convergencia de la serie:**

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{p}, p \in \mathbb{R}}$$

14. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

    a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{10n^2+5n+3}$

    b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$

    c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

15. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

    a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

    b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$