Trabajo Práctico Nº9: Sucesiones y Series Numéricas

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I incorpore las nociones básicas de sucesiones y series. Que determine mediante método gráfico y analítico el valor al cual converge una sucesión. Que aplique los conceptos de límites para la determinación de límites de sucesiones y que pueda determinar si una sucesión es monótona, no creciente o no decreciente o ninguna. Que el estudiante de Elementos de Cálculo I incorpore las nociones básicas de Series y criterios de análisis de convergencia, que identifique una serie geométrica y pueda calcular cuando corresponda, su suma. Que el alumno de Cálculo I profundice sobre las nociones de Series y los distintos criterios de análisis de convergencia y que pueda identificar distintos tipos de series (geométrica, armónica, telescópica, alternante, etc.).

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

1. Defina qué es una sucesión.

2. Dadas las siguientes sucesiones:

   i. $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 0$ ii. $b_n = \frac{1-2n}{n^2}, n \geq 1$ iii. $c_n = 3 + 5n, n \geq 1$

   a. Grafique los primeros 8 términos de la sucesión
   b. Indique, a través de la observación de la gráfica anterior, a qué valor converge y pruebe utilizando definición de límite, que dicho valor es correcto.

3. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso.

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2n} + \frac{3}{3n^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(-\pi)^n}{5^n} + 3^{n/2}\right]$

4. Calcule el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ estudie la monotonía y grafique los primeros 5 términos para cada una de las siguientes sucesiones:

   a. $a_n = \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$ b. $b_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$ c. $c_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

5. Enuncie el teorema del Encaje o Sandwich y calcule el límite de las siguientes sucesiones:

   a. $a_n = \frac{sen(n)}{n}$

   b. $b_n = \frac{n\cdot\cos(n)}{n^2+1}$

6. ¿Es verdad que una sucesión $\{a_n\}$ de números positivos tiene que converger si está acotada superiormente? Justifique su respuesta.

7. Defina qué es una serie y en qué se diferencia con una sucesión.

8. Para las series:

   i. $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   a. Identifique y enuncie qué nombre recibe la serie.
   b. Calcule la expresión general de la sucesión de sumas parciales.
   c. Calcule, si existe, la suma de cada serie.

9. Utilizando el ejercicio anterior, indique si las siguientes series convergen o divergen. Si convergen, calcule su suma:

   a. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

10. Enuncie la condición necesaria de convergencia y luego analice si las siguientes series convergen o divergen:

   a. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4n^2+2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2+2)n!}{(n+2)!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+12}{2^n}$

PARTE B: Ejercicios Adicionales Cálculo

11. Demuestre que: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

12. Enuncie el criterio del cociente y analice la convergencia de las siguientes series:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot n!}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

13. Enuncie el criterio de la raíz y analice la convergencia de las siguientes series:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

14. Probar el teorema de valor absoluto: Dada la serie a_n, si: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

15. Enuncie el teorema de convergencia absoluta y condicional, y analice la convergencia de las siguientes series y diga si converge de forma absoluta o condicional:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

16. Enuncie el criterio de la integral y analice la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p, p \in \mathbb{R}$$

17. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{10n^2+5n+3}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$

PARTE C: Ejercicios Extra-áulicos

Cálculo/Elementos de Cálculo

1. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso.

d. $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$ e. $b_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$ f. $c_n = \frac{n+3}{n^2+5n+6}$

g. $d_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$ h. $e_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ i. $f_n = sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

2. Identifique cuál de las siguientes son series geométricas y cuál telescópica. Luego determine si convergen o divergen. En caso de que converjan calcule su suma.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}\right)$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Cálculo

3. Indique si las siguientes series convergen o divergen:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$