Trabajo práctico Nº 1

Cálculo II (M102) 2013

Ejercicio N° 1:

Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (3\,,2)$; $\boldsymbol{b} = (-3\,,4)$; $\boldsymbol{c} = (-2\,,-e)$; $\boldsymbol{v} = (-2\,,3)$ y $\boldsymbol{w} = (1\,,0)$

(a) Representar gráficamente los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$
(b) Calcular $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; $2\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w}+\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{w}$;
(c) Calcular la **norma** del vector $\boldsymbol{v}$
(d) Calcular la **distancia** entre los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{w}$
(e) Calcular $\|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$
(f) Calcular el **ángulo** formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$
(g) Calcule la **proyección** escalar de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ y el vector de proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$
(h) Dado el vector $\boldsymbol{d} = (2, k)$ determine *k* de tal forma que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{d}$ sean **ortogonales**
(i) determine *k* de forma tal que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{d}$ sean **paralelos**

Ejercicio N°2:

Demuestre que

(a) Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos vectores cualesquiera, entonces los vectores $\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a}+\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$ y $\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a}-\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$ son ortogonales.
(b) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \|\boldsymbol{b}\|^2$

Ejercicio N°3:

(a) Localice el punto cuyas coordenadas polares son:
  a) $\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)$ b) $(3\,,2\,)$ c) $\left(2\sqrt{2}\,,\ \frac{3}{4}\pi\right)$
(b) Encuentre las coordenadas cartesianas de los puntos anteriores
(c) Se dan las coordenadas cartesianas de un punto. Halle las coordenadas polares (r,θ) para:
  a) $(1\,,\ 1\,)$ b) $(2\sqrt{3}\,,-2\,)$ c) $(3\,,2\,)$
(d) Dibuje la región en el plano formada por los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas:
  a) $r > 1$ b) $1 \le r < 3\,,\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ c) $0\ \le r \le 2$; $\frac{\pi}{2} \le \theta$
(e) Demuestre que si dos puntos tienen por coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), la distancia d entre ellos viene dada por $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$. ¿Qué significa esto en términos geométricos?
(f) Halle una ecuación cartesiana de (opcional: represente gráficamente)
  a) $r = 3\ sen\theta$ b) $r = 1/(1+2sen\theta)$ c) $r\ cos\theta = 1$
(g) Deduzca una ecuación polar de la curva representada por la ecuación cartesiana
  a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $2xy = 1$ c) $x^2 - y^2 = 1$

Ejercicio N°4:

Sean $\boldsymbol{a} = (1,3,6)$, $\boldsymbol{b} = (4,-3,3)$ y $\boldsymbol{c} = (2,1,5)$ tres vectores de R^3 .

(a) Represéntelos en un sistema de coordenadas rectangulares
(b) Calcular $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$
(c) Calcular la **norma** del vector $\boldsymbol{c}$
(d) Calcular la **distancia** entre los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$
(e) Calcular $\|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$
(f) Calcular el **ángulo** formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$
(g) Calcule la **proyección** escalar de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ y el vector de proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$
(h) Hallar el **área** del paralelogramo que tiene por laos los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

(i) Calcular el **volumen** del paralelepípedo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ **y** $\boldsymbol{c}$.

Ejercicio N° 5:

(a) ¿Qué restricciones deben tener $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ para que la terna $(x\,,y\,,z)$ represente un punto sobre el eje y? ¿y sobre el eje z?, ¿y en el plano xz? ¿y en el plano yz?
(b) ¿Cuál de los puntos $P=(6\,,2\,,3)$, $Q=(-5\,,-1\,,4)$ y $R=(0\,,3\,,8)$ está más cercano al plano xz? ¿Cuál punto se encuentra en el plano yz?
(c) Encuentre la ecuación de la esfera que tiene como centro en el punto $(3\,,8\,,1)$ y pasa por el punto $(4,3,-1)$.
(d) Demuestre, empleando vectores, que los puntos $A{:}\,(4,9\,,1)$; $B{:}\,(-2,6\,,3)$ y $C=(6\,,3\,,-2)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
(e) Tres vectores $\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ de R^3 satisfacen las siguientes propiedades:
$\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{c}\|=5$; $\|\boldsymbol{b}\|=1$; $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\|=\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\|$
Si el ángulo que forman $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es de $\frac{\pi}{8}$, halle el que forman $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$

Ejercicio N° 6:

Determinar las ecuaciones paramétricas, vectoriales y escalares (caso corresponda) de:
(a) La recta que pasa por $(-1\,,-1\,,-1)$ y tiene la dirección de $(0\,,1\,,0)$.
(b) La recta que pasa por $(-1\,,-1\,,-1)$ y $(1\,,-1\,,2)$
(c) El plano generado por los vectores $\boldsymbol{v}_1=(2\,,7\,,0)$ y $\boldsymbol{v}_2=(0\,,2\,,7)$
(d) El plano que pasa por los puntos $(0\,,0\,,0)$; $(2\,,0\,,-1)$ y $(0\,,4\,,-3)$.
(e) Demostrar que no existen puntos (x , y , z) que satisfagan $2x-3y+z-2=0$ y estén en la recta $\boldsymbol{v}=(2\,,-2\,,-1)+t(1\,,1\,,1)$
(f) Calcular la distancia del punto $Q=(1\,,0\,,-2)$ al plano $2x-3y+4z+1=0$
(g) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1\,,2\,,-3)$ y es perpendicular a la recta $\boldsymbol{v}=(0,-2\,,1)+t(1,-2,3)$
(h) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $\boldsymbol{v}=(-1\,,1\,,2)+t(3\,,2\,,4)$ y es perpendicular al plano $2x+y-3z+4=0$

Ejercicio N° 7:

(a) Los siguientes puntos vienen dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno de ellos en coordenadas rectangulares y en coordenadas esféricas:
a) $(1,45°,1)$ b) $\left(2,\frac{\pi}{2},-4\right)$
(b) Transformar los siguientes puntos en coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y esfèricas:
a) $(2,1,-2)$ b) $(0,3,4)$
(c) Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas:
(a) $(r,\theta,z)\rightarrow(r,\theta\,,-z)$
(b) $(r,\theta,z)\rightarrow(r,\theta+\pi\,,-z)$
(c) $(r,\theta,z)\rightarrow\left(-r,\theta-\frac{\pi}{4}\,,z\right)$
(d) Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas esféricas:
(a) $(\rho,\theta,\phi)\rightarrow(\rho,\theta+\pi\,,\phi)$
(b) $(\rho,\theta,\phi)\rightarrow(\rho,\theta,\pi-\phi)$
(c) $(\rho,\theta,\phi)\rightarrow(2\rho,\theta+\frac{\pi}{2}\,,\phi)$

(e) Describir las superficies dadas en coordenadas cilíndricas: $r =$ constante ; $\theta =$ constante ; $z =$ constante
(f) Describir las superficies dadas en coordenadas esféricas: $\rho =$ constante ; $\theta =$ constante ; $\phi =$ constante
(g) Expresar el plano $z = x$ en coordenadas (a) cilíndricas y (b) esféricas

Ejercicio N° 8:

Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (3, 2, 0, -1, 0)$ **;** $\boldsymbol{b} = (-3, 4, 1, 0, -1)$ **;** $\boldsymbol{c} = (-2, -e, 5, 1, 0)$**;** $\boldsymbol{d} = (0, -1, 2, 3)$

(a) Calcular $3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{2c}$; $\boldsymbol{a} \cdot (-\boldsymbol{b})$;
(b) Puede efectuar las siguientes operaciones? $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{d}$; $\boldsymbol{a}$ x $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}$. Justifique
(c) Calcular la **norma** del vector $\boldsymbol{d}$
(d) Calcular la **distancia** entre los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$
(e) Calcular $\|2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|$
(f) Calcular el **ángulo** formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$
(g) Calcule la **proyección** escalar de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ y el vector de proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$
(h) Dado el vector $\boldsymbol{v} = (2, k, -1, 0, 2)$ determine k de tal forma que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{v}$ sean **ortogonales**