Trabajo Práctico 1

1. Defina los siguientes conjuntos por extensión:

$A = \{x \in \mathbb{N}: 2 \leq x \leq 7\}$

$B = \{x \in \mathbb{N}: -3 \leq x < 5\}$

$\boldsymbol{C = \{x \in \mathbb{Z}: -3 \leq x < 5\}}$

$\boldsymbol{D = \{x \in \mathbb{R}: 6x^2 + x - 2 = 0\}}$

$\boldsymbol{E = \{x \in \mathbb{Z}: x > -4 \wedge x < 7\}}$

$\boldsymbol{F = \{x \in \mathbb{Z}: x < -4 \wedge x > 7\}}$

2. Defina los siguientes conjuntos por comprensión:

$\boldsymbol{A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}}$

$\boldsymbol{B = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}}$

$\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, \dots\}}$

$\boldsymbol{D = \{\dots, -5, -3, -1\}}$

$\boldsymbol{E = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}}$

$\boldsymbol{F = \{4, 5, 6, \dots, 89, 90, 91\}}$

3. En relación a los conjuntos definidos en el ejercicio anterior, determine cuáles de las siguientes relaciones de inclusión son verdaderas y cuáles falsas:

$\boldsymbol{A \subseteq B}$	$\boldsymbol{C \subseteq B}$	$\boldsymbol{D \subseteq B}$
$\boldsymbol{A \subseteq E}$	$\boldsymbol{F \subseteq E}$	$\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{N}$
$\boldsymbol{B \subseteq B}$	$\boldsymbol{E \subseteq F}$	$\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{Z}$
$\boldsymbol{B \subseteq C}$	$\boldsymbol{F \subseteq C}$	$\mathbb{N} \subseteq \boldsymbol{E}$

4. Defina la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

$\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 1 = 0\}}$

$\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0\}}$

$\boldsymbol{C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x + 7 = 0\}}$

$\boldsymbol{D = \{x \in \mathbb{Z}: 23 \leq x < 80\}}$

$\boldsymbol{E = \{x \in \mathbb{R}: 23 \leq x < 80\}}$

5. Sea *P* un pentágono regular y *Q* un cubo:

   a. Represente gráficamente a *P* y Q y nombre sus vértices.

   b. Defina por extensión los conjuntos $V = \{x: x\ es\ vértice\ de\ Q\}$ y $D = \{x: x\ es\ diagonal\ de\ P\}$

   c. Determine la cardinalidad de V y D.

6. Sea B={1,2,3} y sea A={∅,{∅},{∅,B},B,1,2}. Determine cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas y cuáles falsas:

$\emptyset \in A$	$\{B\} \in A$
$\emptyset \in B$	$\{B\} \in B$
$\emptyset \subseteq A$	$\{B\} \subseteq A$
$\emptyset \subseteq B$	$\{B\} \subseteq B$
$B \in A$	$\{\emptyset,1,B\} \in A$
$B \subseteq A$	$\{\emptyset,1,B\} \subseteq A$
$\{\emptyset\} \in A$	$\{\{\emptyset\}\} \in A$
$\{\emptyset\} \subseteq A$	$\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$
$\{\emptyset\} \in B$	$\{2,3\} \in B$
$\{\emptyset\} \subseteq B$	$\{2,3\} \subseteq B$

7. Represente a través de diagramas de Venn cada uno de los siguientes conjuntos.

   a. $\boldsymbol{A \cup B}$

   b. $\boldsymbol{A \cap B}$

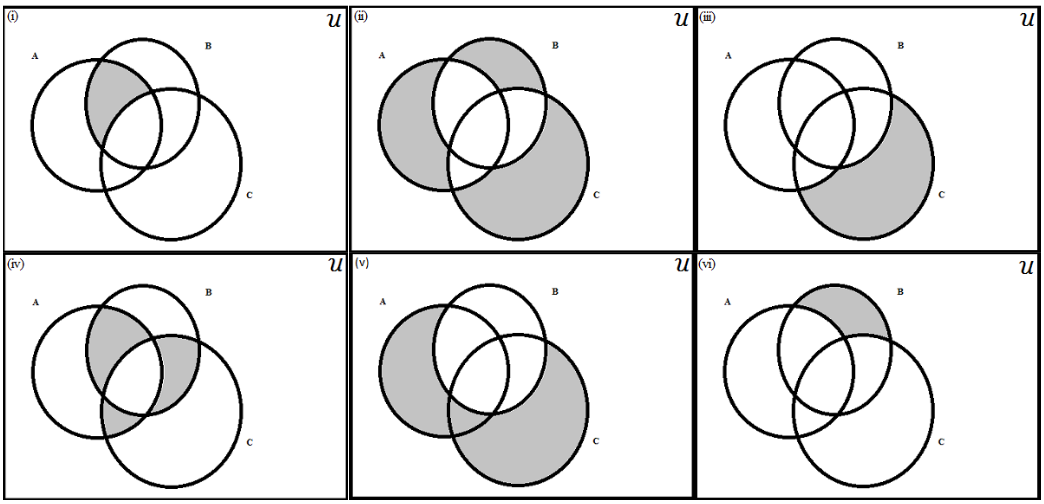
   c. $(\boldsymbol{A \cup B}) \cap \boldsymbol{C}$

   d. $\boldsymbol{A^C}$

   e. $\boldsymbol{B^C \cap C}$

   f. $\boldsymbol{D - E}$

8. Dados los conjuntos representados en los siguientes diagramas de Venn,



   a. Identifique los conjuntos sombreados en cada diagrama de Venn.

   b. Identifique los conjuntos sombreados en cada diagrama de Venn utilizando, al menos una vez, complemento.

Trabajo Práctico 1

9. Dados los siguientes conjuntos:

$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \colon \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{15}\}$

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{U}} \colon \boldsymbol{x\ es\ m\acute{u}ltiplo\ de\ 3}\}$

$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{U}} \colon \boldsymbol{x\ es\ primo}\}$

$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{U}} \colon \boldsymbol{x\ pertenece\ a\ la\ sucesi\acute{o}n\ de\ Fibonacci}\}$

La sucesión de Fibonacci es 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … Es una sucesión infinita de números enteros no negativos, cuyos primeros números son 0 y 1 y los demás elementos de la sucesión, se obtienen sumando siempre los últimos dos números de la sucesión.

a. Defina cada uno de ellos.

b. Defina por extensión los siguientes conjuntos:

→ $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
→ $\boldsymbol{A^C} \cup \boldsymbol{B^C}$
→ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}$
→ $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$
→ $\boldsymbol{A^C} \cap \boldsymbol{B}$
→ $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{B}$

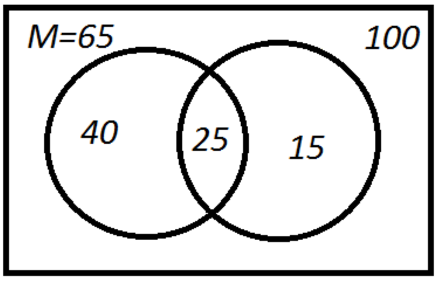
10. Sean *A*=(-4,8]; *B*=[2,∞); *C*=[-10,5]; *D*=(-4,4). Exprese por comprensión el conjunto que resulte de las siguientes operaciones y grafique en la recta real. Además, si es posible, indique el conjunto en notación de intervalos.

→ $A \cup D$
→ $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
→ $(\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{C}$
→ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}$
→ $\boldsymbol{C^C}$
→ $\boldsymbol{B^C}$

11. Lea el siguiente problema. Realice un diagrama de Venn para representar la situación y responda.

En una prueba de ingreso a una universidad se presentaron 100 alumnos, de los cuales 65 aprobaron el examen de matemática, 25 el de matemática y física, y 15 aprobaron solo el examen de física.

Trabajo Práctico 1



a. ¿Cuántos no aprobaron ninguno de los exámenes mencionados?

b. ¿Cuántos alumnos aprobaron física?

c. ¿Cuántos alumnos aprobaron sólo matemática?

12.Sean *A*={1,2,3,4,5} y *B*={1,3,5,7,9}.

a. Defina por extensión $\boldsymbol{A \times B}$

b. Defina por extensión$\boldsymbol{C} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$

c. Defina por extensión$\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\}$

d. Defina por extensión$\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x} + \mathbf{3}\}$

e. Defina por extensión$\boldsymbol{F} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}\}$

13.Representen gráficamente los siguientes conjuntos:

a. $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \times (\mathbf{2}, \mathbf{4}]$

b. $[\mathbf{0}, \mathbf{3}) \times ([-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \cup (\mathbf{2}, \mathbf{3}))$

c. $\{\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{7}\} \times \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$

d. $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\} \times [\mathbf{0}, \mathbf{4}]$

e. $((\mathbf{1}, \mathbf{3}) \cup \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}) \times (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

f. $([\mathbf{2}, \mathbf{5}) \times (\mathbf{3}, \mathbf{6})) \cap ([\mathbf{3}, \mathbf{7}] \times (\mathbf{2}, \mathbf{4}])$

14. Siendo que $A = \{x \in R | x^2 - 1 = 0\}$ y $B = \{x \in R | |x| \leq 1\}$, obtenga $A \cap B$ y $(A \cup B)^C$

Trabajo Práctico 1

Ejercicios adicionales propuestos

1. Defina por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, en caso que sea posible.

$$A = \{x \in \mathbb{Z}: -3 < x < 4\}$$
$$B = \{x | x \text{ es entero positivo y múltiplo de } 3\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R}: (3x-1)(x+2) = 0\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{Z}: (3x-1)(x+2) = 0\}$$

2. Enumere cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

$$A = \{n \in \mathbb{N}: n \text{ es divisible por } 5\}$$
$$B = \{1/n | n \text{ es primo}\}$$
$$C = \{x: x \text{ es racional y } 0 < x < 1\}$$

3. Describa por extensión cada uno de los siguientes conjuntos (escriba ∅ si son vacíos)

$$A = \{x \in \mathbb{N}: x^2 = 9\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 9\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{Z}: 3 < |x| < 7\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{Z}: 3 < |-x| < 7\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 = 3\}$$
$$F = \{3x+1: x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6\}$$

4. Determine la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos.

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z}: \frac{1}{8} < x < \frac{17}{2}\right\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} \text{ es entero}\}$$
$$C = \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$$
$$D = \{a, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

5. Describa por comprensión los siguientes conjuntos.

   a. El conjunto de todos los enteros que pueden ser escritos como suma de cuadrados de dos enteros.

   b. El conjunto de todos los enteros menores que 1000 que son cuadrados de un número entero.

   c. El conjunto de todos los números que son múltiplos enteros de 13.

d. $B = \{1,3,5,7,9\}$

6. Para los siguientes pares de conjuntos A y B defina por extensión A y B y determine si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ o ninguna de las anteriores.
   a. $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ par\ \wedge x^2 \leq 149\}}$ y $\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{N}: x + 1 es\ impar\ \wedge x\ \leq 10\}}$
   b. $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ impar\ y\ x^2 \leq 130\}}$ y $\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{N}: x + 1\ es\ par\ y\ x < 12\}}$

7. Dados los siguientes conjuntos:

   $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}}$

   $\boldsymbol{B = \{y \in \mathbb{R}: y\ \geq 1\}}$

   $\boldsymbol{C = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}: m\ es\ par\ y\ n^2 = 1\}}$

   $\boldsymbol{D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1\}}$

   $\boldsymbol{E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0\}}$

   a. Represente gráficamente.

   → $\boldsymbol{A \times B}$

   → $\boldsymbol{C}$

   → $\boldsymbol{D \cup E}$

   b. Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   → $(2,3) \in A \times B$

   → $(3,2) \in A \times B$

   → Siendo $\boldsymbol{x > 20}$, $\boldsymbol{(x, 100) \in A \times B}$

   → $\boldsymbol{(0, 1) \in C}$

   → $\boldsymbol{(6, -1) \in C}$

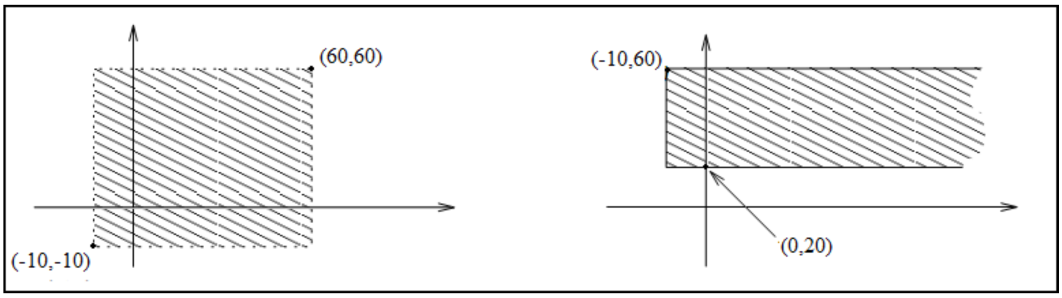
   → $\boldsymbol{\{(100, 1), (-1, 1)\} \subset C}$

   → $\boldsymbol{(3, -\frac{1}{2}) \in D \cup E}$

   → $\boldsymbol{\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 2 \leq x < \pi, -1 < y < 0\} \subset D \cup E}$

8. Defina por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Trabajo Práctico 1



9. Utilizando las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la unión y la intersección, las leyes de De Morgan, compruebe las siguientes identidades. Ilustre cada caso con un diagrama de Venn. Recuerde que $A - B = A \cap B^C$.

   a. $(A \cup B) \cap (A \cup B^C) = A$
   b. $(A^C \cap B)^C = A \cup B^C$

   c. $A \cap (B \cup A)^C = \emptyset$
   d. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   e. $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

10. Simplifique la expresión de modo que *A, B* y *C* aparezcan a lo sumo una vez:

   a. $\left(\left(\boldsymbol{A^C} \cup \boldsymbol{C^C}\right) \cap \boldsymbol{B}\right)^{\boldsymbol{C}} \cup \left(\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{C}} \cup \boldsymbol{C}\right)^{\boldsymbol{C}}$
   b. $\left(\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})^{\boldsymbol{C}}\right)^{\boldsymbol{C}} \cap \left(\boldsymbol{A^C} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})^{\boldsymbol{C}}\right)^{\boldsymbol{C}}$

11. Sean $S = \{0,1,2,3,4\}$ y $T = \{0,2,4\}$

   a. Determine la cantidad de pares ordenados que tiene $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}$, y los que tiene $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S}$.
   b. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:
      - $\rightarrow$ $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}\}$
      - $\rightarrow$ $\boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S} : \boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}\}$
      - $\rightarrow$ $\boldsymbol{C} = \{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}\}$
      - $\rightarrow$ $\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m}.\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{4}\}$
      - $\rightarrow$ $\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{10}\}$

12. Realice un diagrama de Venn para representar el siguiente problema y responda.

   De un total de 60 alumnos de un colegio: 15 estudian francés solamente, 11 estudian francés e inglés, 12 estudian alemán solamente, 8 estudian francés y alemán, 10 estudian inglés solamente, 5 estudian inglés y alemán y 3 estudian los tres idiomas.

a. ¿Cuántos no estudian ningún idioma?

b. ¿Cuántos alumnos estudian alemán?

c. ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?

d. ¿Cuántos estudian francés?

13. A partir de los siguientes conjuntos:

$$\boldsymbol{A} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{4}\right\}$$

$$\boldsymbol{B} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{9}\right\}$$

$$\boldsymbol{C} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}\right\}$$

Describa y grafique $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ y $A^C \cup C^C$