# Introducción al Análisis II

## 1. Convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones.

1. En cada uno de los siguientes casos, grafique la sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ y halle el límite puntual, si existe.

   (a) $A = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1 & -n \leq x \leq n \\ 0 & |x| > n \end{cases}$

   (b) $A = [0,1]$, $f_n(x) = x^n/n$

   (c) $A = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n & -n \leq x \leq n \\ 0 & |x| > n \end{cases}$

   (d) $A = [0,1]$, $f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ \frac{n(1-x)}{n-1} & 1/n < x \leq 1 \end{cases}$

   (e) $A = [0,1]$, $f_n(x) = n\,x\,(1-x^2)^n$

   (f) $A = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

2. En cada caso del ejercicio anterior, analice la convergencia uniforme. Si no lo es, indique un subconjunto de $A$, si existe, donde lo sea.

3. Demuestre, por definición, que:

   (a) la sucesión $f_n(z) = \frac{1}{1+nz}$ converge uniformemente a cero para todo $z$ tal que $|z| \geq 2$.

   (b) la sucesión del ejercicio 1. f no converge uniformemente a $f$.

4. Sea la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & x \leq -1/n \\ nx & \text{si} & -1/n < x < 1/n \\ 1 & \text{si} & 1/n \leq x \end{cases}$$

   Calcule la función $f(x)$ a la que converge. Para qué valores de $x$ la sucesión de funciones converge uniformemente?.

5. (a) Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en $E \neq \varnothing$. Pruebe que $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente en $E$. Si, además, $f_n$ y $g_n$ son funciones uniformemente acotadas en $E$. Pruebe que $\{f_n . g_n\}$ converge uniformemente en $E$.

   (b) Dé un ejemplo de dos sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ que converjan uniformemente en algún conjunto $E$, tal que la sucesión $\{f_n . g_n\}$ converja puntualmente pero no uniformemente en $E$.

6. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua. Definimos la sucesión $f_n(x) = f(x + 1/n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la sucesión $f_n$ converge uniformemente a $f$ sobre $\mathbb{R}$.

7. Halle la suma de las siguientes series e indique en que conjunto converge absoluta y uniformemente.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2}{(1+z^2)^n}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \pm i$.

8. Pruebe que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$
converge uniformemente en todo intervalo acotado pero no converge absolutamente para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

9. Verifique que las siguientes series convergen uniformemente en los conjuntos indicados.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, $\{z : |z| \leq 1\}$.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z^2-1)^n}$, $\{z : |z| > 2\}$.

10. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones definidas sobre $E$. Pruebe que: Si
(a) $\sum f_n(x)$ tiene una sucesión de sumas parciales acotadas en $E$,
(b) $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero sobre $E$,
(c) $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ para todo $x \in E$.
Entonces $\sum f_n(x) . g_n(x)$ converge uniformemente sobre $E$.

    (a) Determine la region donde converge uniformemente la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(nx)}{n+(1+|x|)^n},\ x \in \mathbb{R}$$

    (b) Teniendo en cuenta la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(nx)}{n},\ x \in \mathbb{R}$$
    que puede decir sobre la recíproca del criterio de Weierstrass.

11. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f$ en un conjunto no vacío $E$. Demuestre que para toda sucesión de puntos $\{x_n\}$ de $E$ tal que $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, $x \in E$ implica que
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

12. Sea
$$I(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$
Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos distintos en $(a,b)$ y si la serie $\sum |c_n|$ converge. Pruebe que la serie
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, I(x - x_n), \qquad x \in [a,b]$$
converge uniformemente en $[a,b]$ y que $f$ es una función continua en $[a,b] - \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

13. Considere la siguiente sucesión de funciones en $[0,1]$.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \le x \le 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & 1/n < x \le 2/n \\ 0 & 2/n < x \le 1 \end{cases}$$

halle el límite de la sucesión y calcule $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ ¿qué concluye?

14. Dé un ejemplo de una sucesión $f_n$:$[0,1] \to \mathbb{R}$ que converja puntualmente a cero pero que $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ no converja a cero.

15. Pruebe que $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$, utilizando que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

16. Sea la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, \qquad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

Pruebe que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f$ y que la ecuación

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

se verifica para todo valor real no nulo y es falsa para $x = 0$.

17. Sea la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^+$$

Halle la función $f$ a la cual converge puntualmente. Calcule $f_n'(1)$ y $f'(1)$.

18. Sea $b > a > 0$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx = b - a$$

Profesora: Yanina Gonzalez
2020, FCEN, UNCuyo