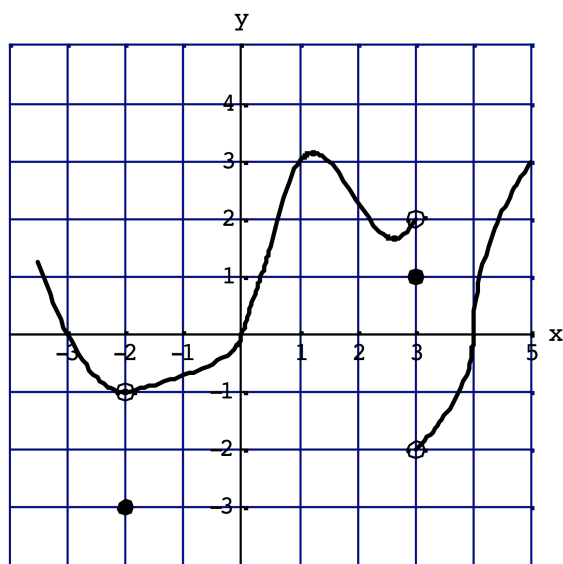


## TRABAJO PRÁCTICO 2: LÍMITE Y CONTINUIDAD

### Límites

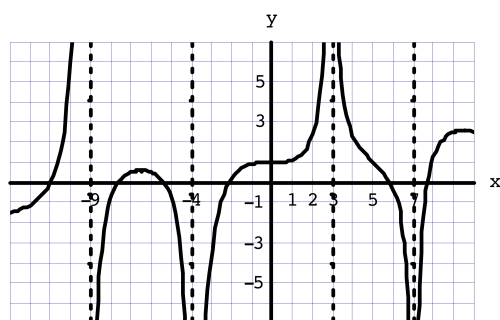
1. Para la función  $f$  cuya gráfica se da a continuación, proporcione el valor de la cantidad dada, si existe. Si no la hay, explique por qué.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- (e)  $f(3)$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
- (h)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- (i)  $f(-2)$



2. Para la función  $f$  cuya gráfica se muestra, conteste a lo que se pide en cada inciso.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow -9^-} f(x)$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow -9^+} f(x)$



- (f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

3. Trace la gráfica de un ejemplo de una función  $f$  que satisfaga todas las condiciones dadas:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2, f(3) = 3, f(-2) = 1.$$

4. Determine los siguientes límites.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{6}{x-5}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{6}{x-5}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x-5)$

5. Determine  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3-1}$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3-1}$  como se indica en cada inciso.

(a) Evaluando  $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$  para valores de  $x$  que se aproximen a 1 por la derecha y por la izquierda.

(b) A partir de la gráfica de  $f$ .

6. Dado que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$ , encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + h(x)]$

(d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2$

(e)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}$

7. Evalúe el límite si existe.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 12}{x + 3}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

(e)  $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

(d)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-5)^2 - 25}{h}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

8. Si  $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$  para todo  $x$ , encuentre  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

9. Pruebe que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right] = 0$ .

10. Encuentre el límite, si existe. Si no lo hay, explique por qué.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -4} |x + 4|$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

11. Muestre por medio de un ejemplo que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$  puede existir aunque ni  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ni  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existan.

12. ¿Cuánto se debe acercar  $x$  a 2 para que  $5x + 3$  quede a una distancia menor que (a) 0,1 y (b) 0,01 de 13?

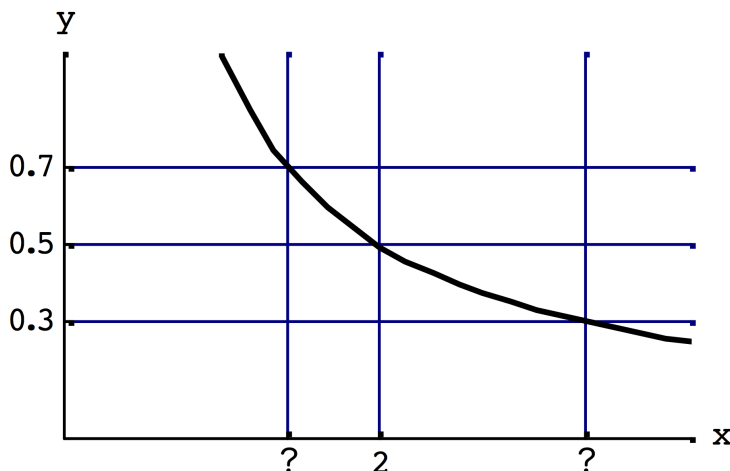
13. Demuestre por definición los siguientes límites, donde  $a \in \mathbb{R}$ .

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (5x + 3) = 13$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} (x + a) = 2 + a$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} |2x - a| = |a|$$

14. Con la siguiente gráfica de la función  $f$  dada por  $f(x) = 1/x$ , halle un número  $\delta$  tal que  $|\frac{1}{x} - 0,5| < 0,2$  siempre que  $|x - 2| < \delta$ .



15. Indique cuánto se debe acercar  $x$  a  $-3$  para que  $\frac{1}{(x+3)^4} > 10.000$ .

16. Con la definición de límite infinito, pruebe que  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^4} = \infty$ .

17. Trace la gráfica de las siguientes funciones

$$(a) g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < -1 \\ 2+x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ 4-x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (b) g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1-x & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

A partir de la gráfica determine en cada caso el valor de los siguientes límites cuando existan

i.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

v.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

vii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

vi.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

18. Calcule los siguientes límites, recordando que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(3x)}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

19. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan. Justifique.

- |                                                          |                                                                          |                                                                                          |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-2x}{3x-7}$      | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right)$ | (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$                                               |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+7x}{x^4-2}$  | (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3-x}$            | (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$                          |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-4x})$    | (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7-1}{x^6+1}$                    | (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{(x+1)^2}{x} - \frac{x^3}{(x-1)^2} \right]$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x \cos x}$        | (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$              | (p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x^2)$                                          |
| (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2+3x+1} - x \right)$     | (q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$                            |
| (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x+3) - \ln x]$     | (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x})$                         | (r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$                            |

20. Demuestre por definición los siguientes límites

- (a)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ ,  $a > 0$       (b)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{2a}$ ,  $a \neq 0$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right] = 0$

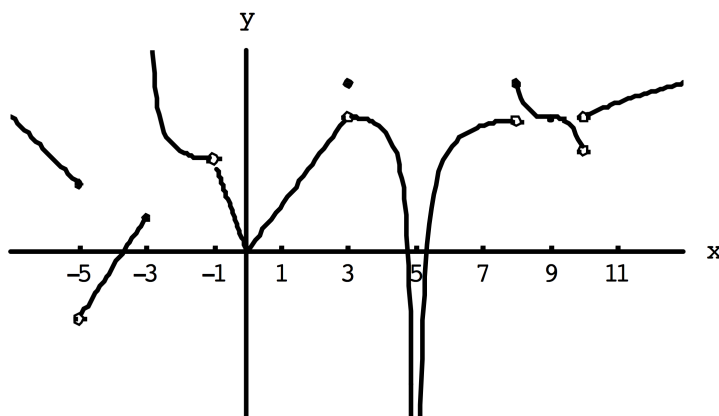
21. Encontrar  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  siempre que  $|x - a| < \delta$ , donde  $f(x) = x^4$  y  $l = a^4$ .

22. Demuestre por definición los siguientes límites

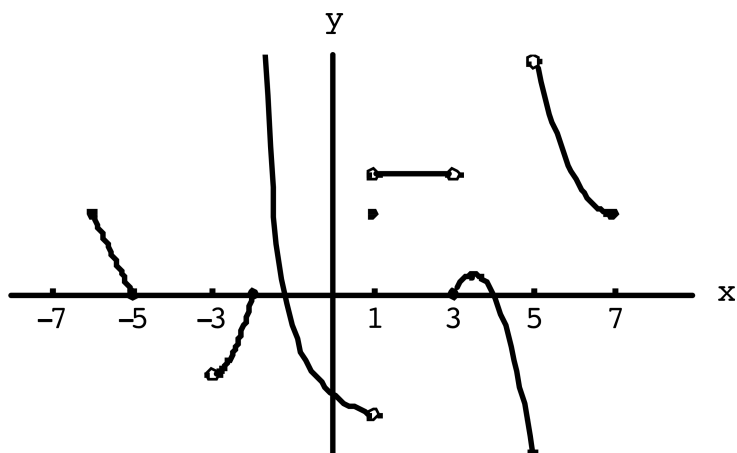
- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1) = \infty$       (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x}{x-1} = 1$

## Continuidad y asíntotas

23. (a) A partir de la gráfica de la función  $f$ , dé los valores de  $x$  en que  $f$  es discontinua y explique por qué.
- (b) Para cada uno de los valores de  $x$  que se den en el inciso (a), determine si  $f$  es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



24. A partir de la gráfica de la función  $g$ , dé los intervalos sobre los que  $g$  es continua.



25. Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en  $x = 3$ , y sea continua desde la izquierda en 3.

26. Grafique una función que tenga una discontinuidad no evitable en  $x = 2$  y una discontinuidad evitable en  $x = 4$ , pero sea continua en todos los demás puntos.

27. Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para mostrar que:

(a) la función dada por  $f(x) = (x + 2x^3)^4$  es continua en  $-1$ ,

(b) la función dada por  $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$  es continua en  $[-4, 4]$ .

28. Sea  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ . Muestre que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$

29. Explique por qué la función es continua en todo punto de su dominio, aplicando los teoremas correspondientes. Dé el dominio.

(a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$

(b)  $h(x) = e^x \sin(5x)$

(c)  $g(x) = \sqrt{16 - x^2}(x^2 - 2)$

30. Aplique la continuidad para evaluar el límite.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5} + x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x}$

31. Explique por qué la función es discontinua en el punto  $x = a$  dado. Bosqueje su gráfica.

(a)  $f(x) = \ln|x - 2|$ ,  $a = 2$ .

(d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 3 & \text{si } x = 4 \end{cases}$ ,  $a = 4$

(b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ ,  $a = -1$ .

(c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ ,  $a = 1$

(e)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ ,  $a = 2$

32. Encuentre, si los hay, los valores de  $x$  en que la función dada es discontinua. ¿En cuáles de estos valores  $f$  es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados? Trace la gráfica de  $f$ .

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x < 0 \\ (x+1)^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

33. ¿Para qué valores de  $x$  es continua  $f$ ?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

34. Analice, si corresponde, qué tipo de discontinuidad presentan las siguientes funciones en  $a$ . Si dicha discontinuidad es evitable, halle una función  $g$  que coincida con  $f$  para todo  $x \neq a$  y que sea continua en toda la recta real.

$$(a) f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x+2}, a = -2$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, a = 0$$

$$(b) f(x) = \frac{x-7}{|x-7|}, a = 7$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, a = 0$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, a = 2$$

$$(d) f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}, a = 9$$

$$(h) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}, a = 2$$

$$(e) f(x) = \frac{x^3+64}{x+4}, a = -4$$

35. En cada uno de los siguientes casos, halle todos los pares de números reales  $a$  y  $b$  tales que la función dada sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 3 \\ -2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax - 3a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

36. Para la función  $f$  cuya gráfica se exhibe, determine:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

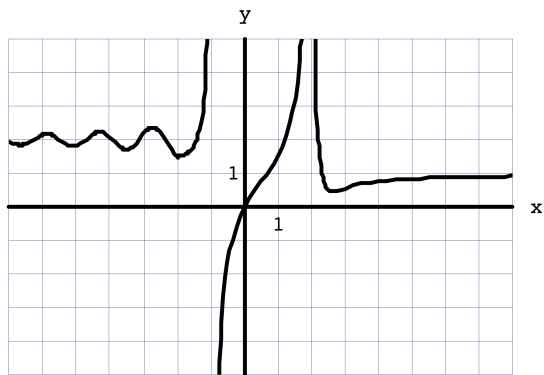
$$(b) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas.



37. Bosqueje la gráfica de un ejemplo de una función  $f$  que satisfaga todas las condiciones dadas en cada inciso.

(a)  $f(0) = 0, f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f$  es impar.

(b)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$

38. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales a las gráficas de cada una de las siguientes funciones. Represente gráficamente.

(a)  $f(x) = \frac{x}{x+4}$

(d)  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

(g)  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$

(b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

(e)  $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$

(h)  $f(x) = \frac{-x^2+x+2}{(x-1)^3}$

(c)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$

(f)  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+4}$

39. Halle una fórmula para una función  $f$  que satisfaga todas las siguientes condiciones:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty, f(2) = 0.$

40. Halle una fórmula para una función  $f$  que tenga asíntotas verticales de ecuación  $x = 1$  y  $x = 3$ , y asíntota horizontal de ecuación  $y = 1$ .

41. (a) Probar que si  $|f(x)| \leq |x|$  entonces  $f$  es continua en 0.

(b) Probar que si  $|f(x)| \leq |g(x)|$ ,  $g$  es continua en cero y  $g(0) = 0$ , entonces  $f$  es continua en 0.

42. (a) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua. Probar que si  $f|_{\mathbb{Q}} = 0$ , entonces  $f \equiv 0$ .

(b) Probar que si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , son continuas y coinciden en  $\mathbb{Q}$ , entonces son iguales.

43. Demuestre que:

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$

(c) De un ejemplo en el que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$  pero no  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

44. Si  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , ¿se sigue de ello necesariamente que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ?

45. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y sea  $a$  un número real. Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$  no existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  no existe.