Elementos de Cálculo

1ercuatrimestre 2017

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TRABAJO PRÁCTICO 2: LÍMITE Y CONTINUIDAD

Límites

1. Para la función f cuya gráfica se da a continuación, proporcione el valor de la cantidad dada, si existe. Si no la hay, explique por qué.

   (a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

   (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

   (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

   (d) $\lim_{x\to 3} f(x)$

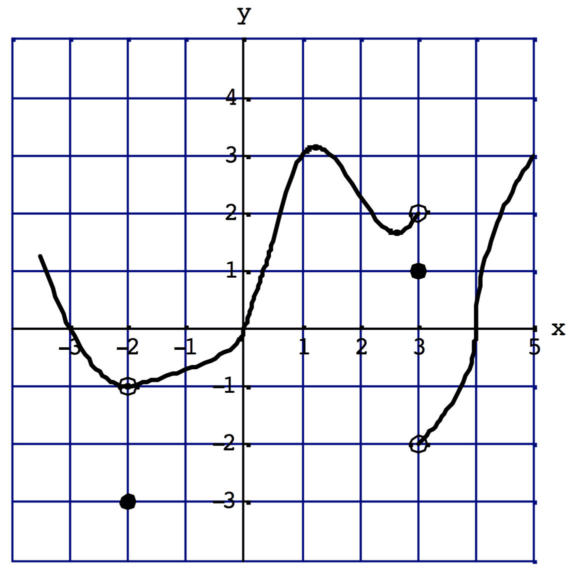
   (e) $f(3)$

   (f) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

   (g) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

   (h) $\lim_{x\to -2} f(x)$

   (i) $f(-2)$



2. Para la función f cuya gráfica se muestra, conteste a lo que se pide en cada inciso.

   (a) $\lim_{x\to 3} f(x)$

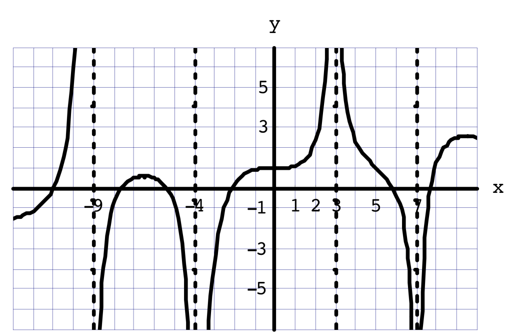
   (b) $\lim_{x\to 7} f(x)$

   (c) $\lim_{x\to -4} f(x)$

   (d) $\lim_{x\to -9^-} f(x)$

   (e) $\lim_{x\to -9^+} f(x)$

   (f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



3. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas:

   $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$, $f(3) = 3$, $f(-2) = 1$.

4. Determine los siguientes límites.

   (a) $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$ (b) $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{6}{x-5}$ (c) $\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5)$

5. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3-1}$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3-1}$ como se indica en cada inciso.

   (a) Evaluando $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$ para valores de x que se aproximen a 1 por la derecha y por la izquierda.

   (b) A partir de la gráfica de f.

6. Dado que $\lim_{x\to a} f(x) = -3$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim_{x\to a} h(x) = 8$, encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

   (a) $\lim_{x\to a}[f(x)+h(x)]$ (d) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$ (g) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

   (b) $\lim_{x\to a}[f(x)]^2$ (e) $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ (h) $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{h(x)-f(x)}$

   (c) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$

7. Evalúe el límite si existe.

   (a) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-x+12}{x+3}$ (c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ (e) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

   (b) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$ (d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-5)^2-25}{h}$ (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

8. Si $1 \leq f(x) \leq x^2+2x+2$ para todo x, encuentre $\lim_{x\to -1} f(x)$.

9. Pruebe que $\lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right] = 0$.

10. Encuentre el límite, si existe. Si no lo hay, explique por qué.

    (a) $\lim_{x\to -4} |x+4|$ (b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

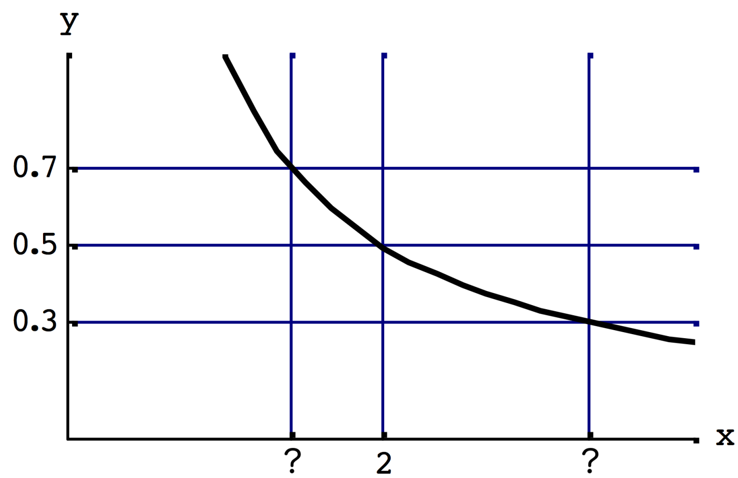
11. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ puede existir aunque ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ existan.

12. ¿Cuánto se debe acercar x a 2 para que $5x+3$ quede a una distancia menor que (a) $0,1$ y (b) $0,01$ de 13?

13. Demuestre por definición los siguientes límites, donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) $\lim_{x\to 2}(5x+3)=13$ (b) $\lim_{x\to 2}(x+a)=2+a$ (c) $\lim_{x\to a}|2x-a|=|a|$

14. Con la siguiente gráfica de la función f dada por $f(x)=1/x$, halle un número δ tal que $\left|\frac{1}{x}-0,5\right|<0,2$ siempre que $|x-2|<\delta$.



15. Indique cuánto se debe acercar x a -3 para que $\frac{1}{(x+3)^4}>10.000$.

16. Con la definición de límite infinito, pruebe que $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^4}=\infty$.

17. Trace la gráfica de las siguientes funciones

(a) $g(x)=\begin{cases} 2-x & si \quad x<-1 \\ 2+x & si \quad -1\le x<1 \\ 4 & si \quad x=1 \\ 4-x & si \quad x>1 \end{cases}$ (b) $g(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\ge 1 \\ x & si \quad -1<x<1 \\ 1-x & si \quad x\le -1 \end{cases}$

A partir de la gráfica determine en cada caso el valor de los siguientes límites cuando existan

i. $\lim_{x\to -1^-} g(x)$ iii. $\lim_{x\to -1} g(x)$ v. $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ vii. $\lim_{x\to -\infty} g(x)$

ii. $\lim_{x\to -1^+} g(x)$ iv. $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ vi. $\lim_{x\to \infty} g(x)$

18. Calcule los siguientes límites, recordando que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(3x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

19. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan. Justifique.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x}{3x-7}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+7x}{x^4-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2-4x})$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x\cos x}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2+1}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} [\ln(x+3)-\ln x]$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3-x}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x7-1}{x^6+1}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x})$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

(o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{(x+1)^2}{x}-\dfrac{x^3}{(x-1)^2}\right]$

(p) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3-5x^2)$

(q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

(r) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$

20. Demuestre por definición los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x}=\sqrt{a},\ a>0$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x+a}=\dfrac{1}{2a},\ a\neq 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left[x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$

21. Encontrar $\delta>0$ tal que $|f(x)-l|<\epsilon$ siempre que $|x-a|<\delta$, donde $f(x)=x^4$ y $l=a^4$.

22. Demuestre por definición los siguientes límites

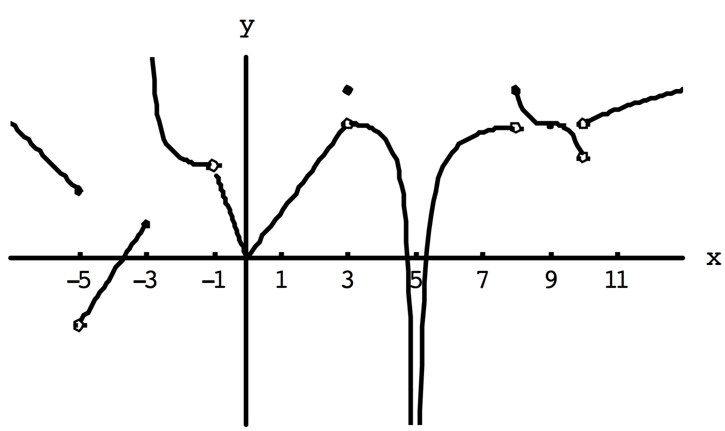
(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-x+1)=\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+x}{x-1}=1$

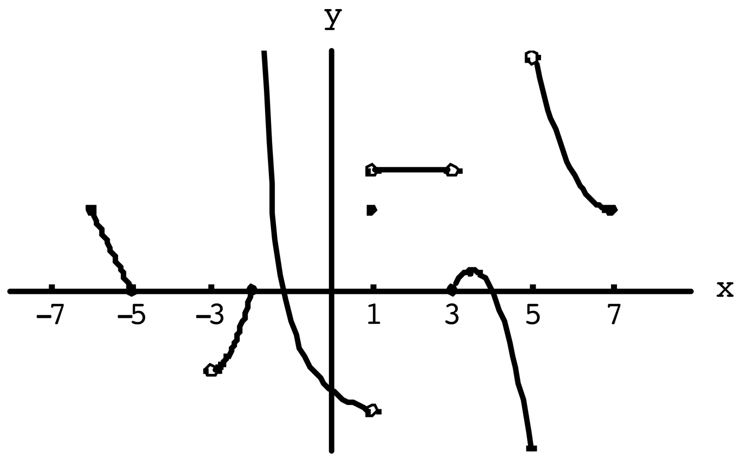
Continuidad y asíntotas

23. (a) A partir de la gráfica de la función f, dé los valores de x en que f es discontinua y explique por qué.

(b) Para cada uno de los valores de x que se den en el inciso (a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



24. A partir de la gráfica de la función g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



25. Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en $x = 3$, y sea continua desde la izquierda en 3.

26. Grafique una función que tenga una discontinuidad no evitable en $x = 2$ y una discontinuidad evitable en $x = 4$, pero sea continua en todos los demás puntos.

27. Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para mostrar que:

    (a) la función dada por $f(x) = (x + 2x^3)^4$ es continua en -1,

    (b) la función dada por $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en $[-4, 4]$.

28. Sea $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si x < 3 \\ 5 - x & si x \geq 3 \end{cases}$. Muestre que f es continua en $\mathbb{R}$

29. Explique por qué la función es continua en todo punto de su dominio, aplicando los teoremas correspondientes. Dé el dominio.

    (a) $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}$ (b) $h(x) = e^x \sin(5x)$ (c) $g(x) = \sqrt{16 - x^2}(x^2 - 2)$

30. Aplique la continuidad para evaluar el límite.

    (a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

31. Explique por qué la función es discontinua en el punto $x = a$ dado. Bosqueje su gráfica.

    (a) $f(x) = \ln|x - 2|, a = 2.$

    (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, a = -1.$

    (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}, a = 1$

    (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x-4} & si \quad x \neq 4 \\ 3 & si \quad x = 4 \end{cases}, a = 4$

    (e) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - 2x & si \quad x > 2 \end{cases}, a = 2$

32. Encuentre, si los hay, los valores de x en que la función dada es discontinua. ¿En cuáles de estos valores f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados? Trace la gráfica de f.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \leq -1 \\ 3x & si \quad -1 < x < 1 \\ 2x-1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & si \quad x < 0 \\ (x+1)^3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

33. ¿Para qué valores de x es continua f?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \quad es \quad racional \\ 1 & si \quad x \quad es \quad irracional \end{cases}$$

34. Analice, si corresponde, qué tipo de discontinuidad presentan las siguientes funciones en a. Si dicha discontinuidad es evitable, halle una función g que coincida con f para todo $x \neq a$ y que sea continua en toda la recta real.

   (a) $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x+2}, a = -2$

   (b) $f(x) = \frac{x-7}{|x-7|}, a = 7$

   (c) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, a = 2$

   (d) $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}, a = 9$

   (e) $f(x) = \frac{x^3+64}{x+4}, a = -4$

   (f) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, a = 0$

   (g) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}, a = 0$

   (h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si \quad x > 2 \\ 3 & si \quad x = 2 \\ x^3-4 & si \quad x < 2 \end{cases}, a = 2$

35. En cada uno de los siguientes casos, halle todos los pares de números reales a y b tales que la función dada sea continua en todo $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \leq 2 \\ ax^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax-2 & si \quad x \leq 1 \\ ax-3a & si \quad x > 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \leq -1 \\ ax+b & si \quad -1 < x < 3 \\ -2 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 0 \\ ax+b & si \quad 0 < x < 2 \\ x^2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

36. Para la función f cuya gráfica se exhibe, determine:

   (a) $\lim_{x \to 2} f(x)$

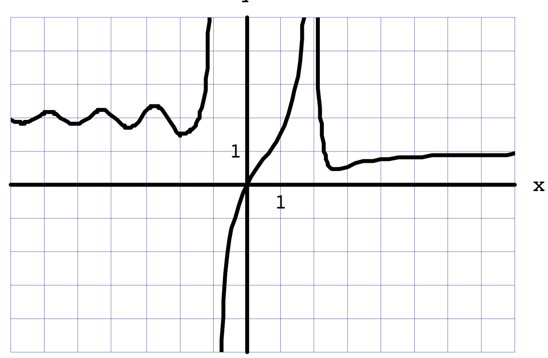
   (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

   (c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas.



37. Bosqueje la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas en cada inciso.

    (a) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, f es impar.

    (b) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$.

38. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales a las gráficas de cada una de las siguientes funciones. Represente gráficamente.

    (a) $f(x) = \frac{x}{x+4}$

    (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

    (c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$

    (d) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

    (e) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$

    (f) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+4}$

    (g) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$

    (h) $f(x) = \frac{-x^2+x+2}{(x-1)^3}$

39. Halle una fórmula para una función f que satisfaga todas las siguientes condiciones: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$.

40. Halle una fórmula para una función f que tenga asíntotas verticales de ecuación $x = 1$ y $x = 3$, y asíntota horizontal de ecuación $y = 1$.

41. Demuestre que:

    (a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to0} f(a+h)$

    (b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 1] = 0$

    (c) De un ejemplo en el que exista $\lim\limits_{x\to0} f(x^2)$ pero no $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

42. Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ¿se sigue de ello necesariamente que $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$?

43. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones y sea a un número real. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existe.