Cálculo I

Trabajo Práctico 2: Límite y Continuidad.

Límites

1. Estimar los siguientes límites elaborando para ello una tabla de valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima al valor para el cual se pide el límite. Luego utilizar una herramienta de graficación con el fin de confirmar el resultado obtenido.

   (a) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

   (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$

   (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

   (d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

   (e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

2. Graficar la función para encontrar su límite (si es que existe). Si no existe explicar por qué.

   (a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$

   (b) $\lim_{x \to e} \dfrac{2}{x - 5}$

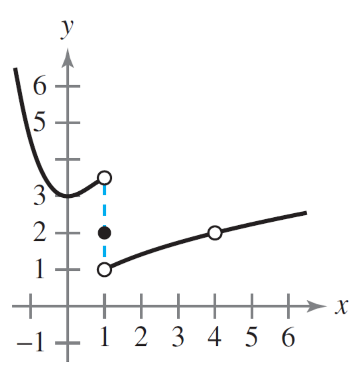
3. Utilizar la gráfica de la función $f(x)$ para determinar si existe el valor de la cantidad dada. De ser así, ubicarlo en la gráfica. Si no existe, explicar por qué.

   (a) $f(1)$

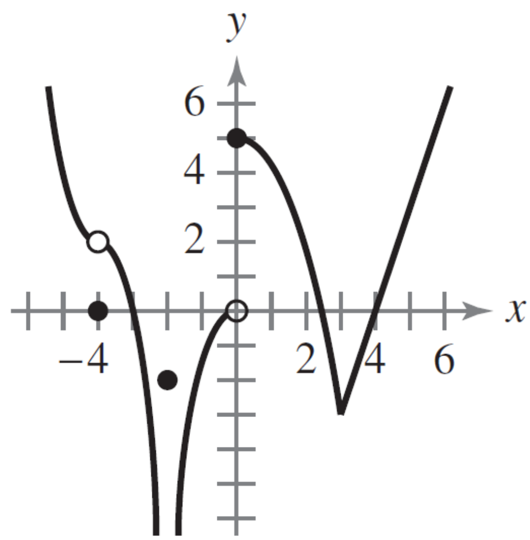
   (b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

   (c) $f(4)$

   (d) $\lim_{x \to 4} f(x)$



4. Utilizar la gráfica de $f(x)$ con el fin de identificar los valores de c para los que existe $\lim_{x\to c} f(x)$



5. Dibujar la gráfica de $f(x)$ y luego identificar los valores de c para los cuales existe $\lim_{x\to c} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & si \quad x < 0 \\ 1 - \cos x & si \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x & si \quad x > \pi \end{cases}$$

6. Describir brevemente lo que significa la notación $\lim_{x\to 8} f(x) = 25$. Acompañe su descripción con una interpretación gráfica de la misma.

7. Si $f(2) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca del límite de f cuando x tiende a 2? Explicar.

8. Si el límite de f cuando x tiende a 2 es 4, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2)$? Explicar.

9. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar si es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué, o dar un ejemplo que lo demuestre.
   (a) Si f no está definida en $x = c$, no existe el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.
   (b) Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es cero, debe existir un número k tal que $f(k) < 0,001$
   (c) Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.
   (d) Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

10. Representar la función y estimar los límites de manera visual.
   (a) $f(x) = x\cos x$
      i. $\lim_{x\to 0} f(x)$
      ii. $\lim_{x\to \pi/3} f(x)$
   (b) $f(t) = t|t-4|$

i. $\lim_{t \to 4} f(t)$

ii. $\lim_{t \to -1} f(t)$

11. Calcular el límite utilizando las propiedades y teoremas estudiados en clase, aclarando cuál de ellas utilizó en cada paso.

(a) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1}$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2+4}$

(c) $\lim_{x \to 1} g(f(x))$ donde $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = x^3$.

(d) $\lim_{x \to 1} g(f(x))$ donde $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$.

(e) $\lim_{x \to 1} \cos \frac{\pi x}{3}$

(f) $\lim_{x \to 2} \sin \frac{\pi x}{2}$

(g) $\lim_{x \to 3} \tan \frac{\pi x}{4}$

12. Utilizar la información que se expone para evaluar los límites.

$\lim_{x \to c} f(x) = 3$
$\lim_{x \to c} g(x) = 2$

(a) $\lim_{x \to c} [5g(x)]$

(b) $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)]$

(d) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

13. Utilizar la gráfica para determinar el límite (si existe) de manera visual. Escribir una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto.

(a) $g(x) = \frac{x^3-x}{x-1}$

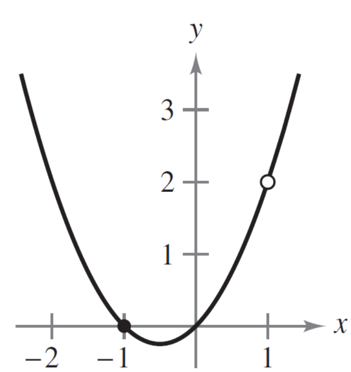
i. $\lim_{x \to 1} g(x)$

ii. $\lim_{x \to -1} g(x)$

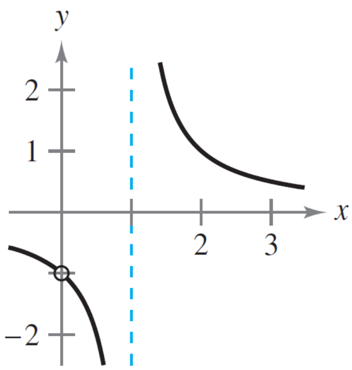
(b) $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$

i. $\lim_{x \to 1} f(x)$

ii. $\lim_{x \to 0} f(x)$



$a)$



$b)$

14. En el contexto del cálculo de límites, explicar qué se quiere decir mediante las funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

15. Encontrar el límite si existe.

(a) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-x+12}{x+3}$

(b) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$

(c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

(d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-5)^2-25}{h}$

(e) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

(f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

(g) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x}{x^2-x}$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

(i) $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$

16. Determinar el límite (si existe) de la función trigonométrica.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}$

(b) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin 3t}{2t}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin(3x)}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{x}$

(e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

17. Calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$

(a) $f(x) = x\cos x$

(b) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

18. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar si es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$

(b) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(c) Si $f(x) = g(x)$ para todos los números reales distintos a $x = 0$, y $\lim_{x\to 0} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to 0} g(x) = L$.

(d) Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

(e) $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, donde $f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x \leq 2 \\ 0 & si \quad x > 2 \end{cases}$

(f) Si $f(x) < g(x)$ para todos los números reales distintos a $x = a$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$.

19. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan. Justifique.

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5-2x}{3x-7}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+7x}{x^4-2}$

(c) $\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2-4x})$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x\cos x}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2+1}$

(f) $\lim_{x\to\infty} [\ln(x+3) - \ln x]$

(g) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(h) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3-x}$

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x7-1}{x^6+1}$

(j) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

(k) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1} - x\right)$

(l) $\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x})$

(m) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$

(n) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

(o) $\lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{(x+1)^2}{x} - \dfrac{x^3}{(x-1)^2}\right]$

(p) $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 5x^2)$

(q) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

(r) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$

20. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ existan.

21. Demuestre por definición los siguientes límites, donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) $\lim_{x\to 2}(5x+3) = 13$

(b) $\lim_{x\to 2}(x+a) = 2+a$

(c) $\lim_{x\to a} |2x-a| = |a|$

22. Demuestre por definición los siguientes límites

(a) $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, a > 0$

(b) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{x+a} = \dfrac{1}{2a}$

(c) $\lim_{x\to a} \left[x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = 0$

23. En cada uno de los siguientes casos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ siempre que $|x-a| < \delta$

(a) $\begin{cases} f(x) = x^4 \\ l = a^4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^4} \\ l = 1, a = 1 \end{cases}$

24. Demuestre por definición los siguientes límites

(a) $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x + 1) = \infty$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2+x}{x-1} = 1$

25. Demuestre que:

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$

(b) $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ si y sólo si $\lim_{x\to a}[f(x) - 1] = 0$

(c) De un ejemplo en el que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

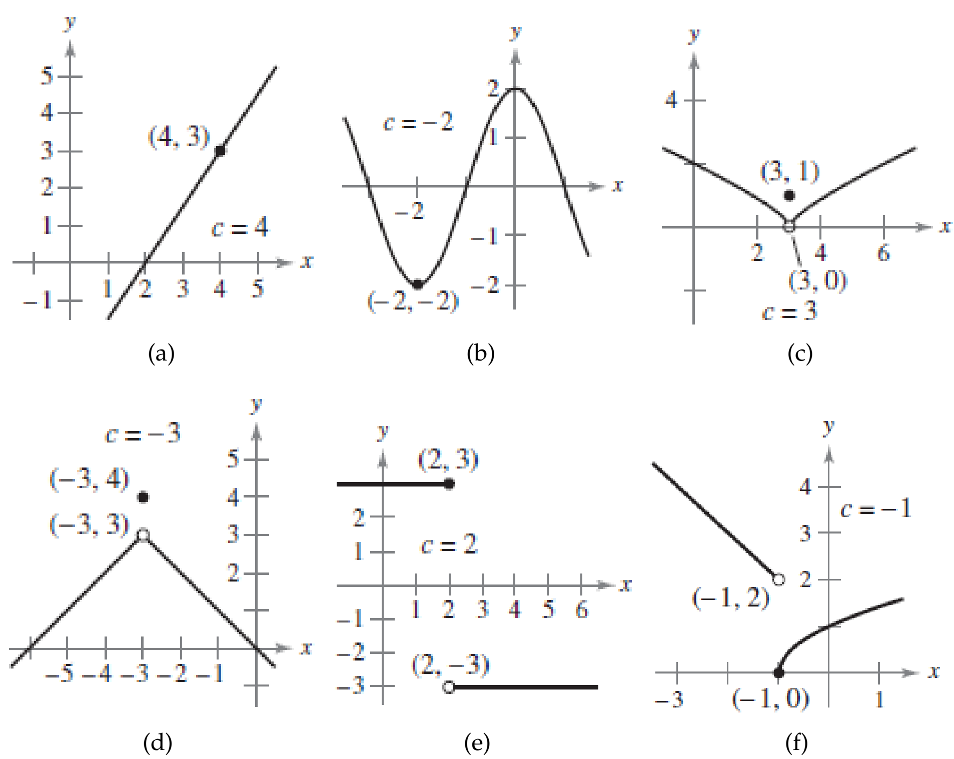
26. Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ¿se sigue de ello necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

27. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones y sea a un número real. Demuestre que si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe.

Continuidad

28. Para cada una de las siguientes gráficas calcule los límites dados y analice la continuidad de la función en c.

$\lim_{x\to c^+} f(x)$; $\lim_{x\to c^-} f(x)$; $\lim_{x\to c} f(x)$.



29. Analice la continuidad de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(c) $f(x) = \frac{1}{2}||x|| + x \qquad (||x|| \to \textit{parte entera})$

30. Encuentre las discontinuidades de las siguientes funciones y diga cuáles son evitables:

(a) $f(x) = \frac{6}{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$

(d) $f(x) = \frac{x-6}{x^2 - 36}$

(e) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 3x - 10}$

(f) $f(x) = \frac{|x-8|}{x-8}$

(g) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si\ x < 1 \\ x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} -2x & si\ x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 1 & si\ x > 2 \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} \tan \frac{\pi x}{4} & si\ |x| < 1 \\ x & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$

31. Describa los intervalos en los que la función es continua:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 2}$

(b) $f(x) = x\sqrt{x+3}$

(c) $f(x) = \sec \frac{\pi x}{4}$

(d) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

32. Verifica si el Teorema del Valor medio es aplicable a las siguientes funciones en el intervalo dado y encuentre el valor de c:

(a) $f(x) = x^2 + x - 1, \qquad [0,5], \qquad f(c) = 11$

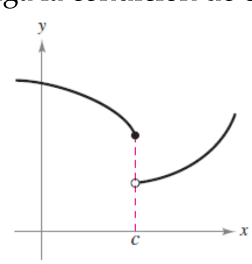
(b) $f(x) = x^2 - 6x + 8, \qquad [0,3], \qquad f(c) = 0$

(c) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2, \qquad [0,3], \qquad f(c) = 4$

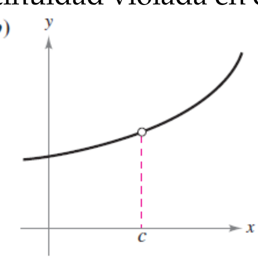
(d) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}, \qquad [\frac{5}{2}, 4], \qquad f(c) = 6$

33. Diga la condición de continuidad violada en cada una de las siguientes funciones:

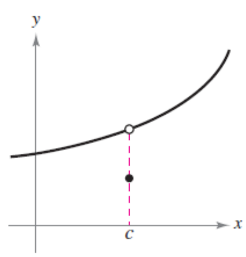
a)



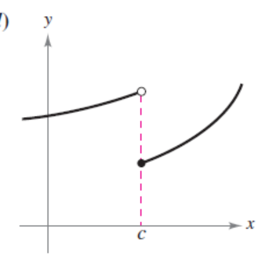
b)



c)

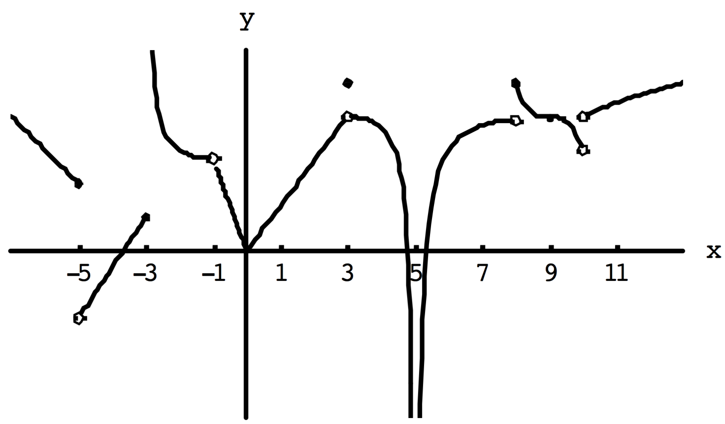


d)

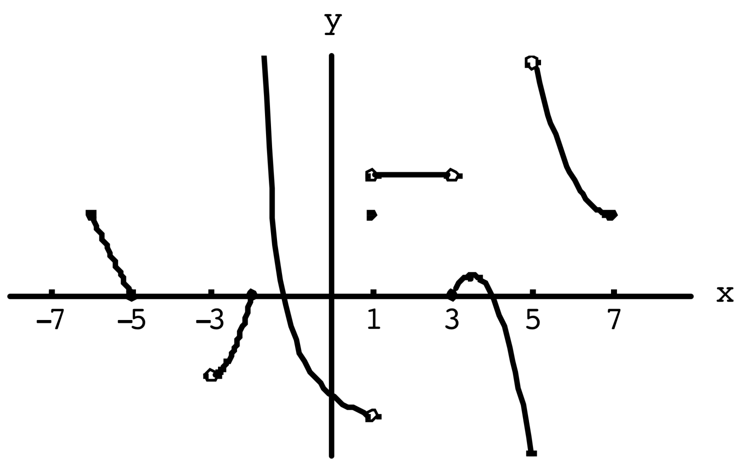


34. (a) A partir de la gráfica de la función f, dé los valores de x en que f es discontinua y explique por qué.

(b) Para cada uno de los valores de x que se den en el inciso (a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



35. A partir de la gráfica de la función g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



36. Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para mostrar que:

(a) la función dada por $f(x) = (x + 2x^3)^4$ es continua en -1,

(b) la función dada por $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en $[-4, 4]$.

37. Explique por qué la función es discontinua en el punto $x = a$ dado. Bosqueje su gráfica.

(a) $f(x) = \ln|x - 2|, a = 2.$

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, a = -1.$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}, a = 1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x-4} & si \quad x \neq 4 \\ 3 & si \quad x = 4 \end{cases}, a = 4$

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - 2x & si \quad x > 2 \end{cases}, a = 2$

38. Explique por qué la función es discontinua en el punto $x = a$ dado. Bosqueje su gráfica.

(a) $f(x) = \ln|x-2|, a = 2.$

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, a = -1.$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}, a = 1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x-4} & si \quad x \neq 4 \\ 3 & si \quad x = 4 \end{cases}, a = 4$

(e) $f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \leq 2 \\ x^2-2x & si \quad x > 2 \end{cases}, a = 2$

39. Encuentre, si los hay, los valores de x en que la función dada es discontinua. ¿En cuáles de estos valores f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados? Trace la gráfica de f.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \leq -1 \\ 3x & si \quad -1 < x < 1 \\ 2x-1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & si \quad x < 0 \\ (x+1)^3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

40. En cada uno de los siguientes casos, halle todos los pares de números reales a y b tales que la función dada sea continua en todo $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \leq 2 \\ ax^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax-2 & si \quad x \leq 1 \\ ax-3a & si \quad x > 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \leq -1 \\ ax+b & si \quad -1 < x < 3 \\ -2 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 0 \\ ax+b & si \quad 0 < x < 2 \\ x^2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

41. Para la función f cuya gráfica se exhibe, determine:

(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$

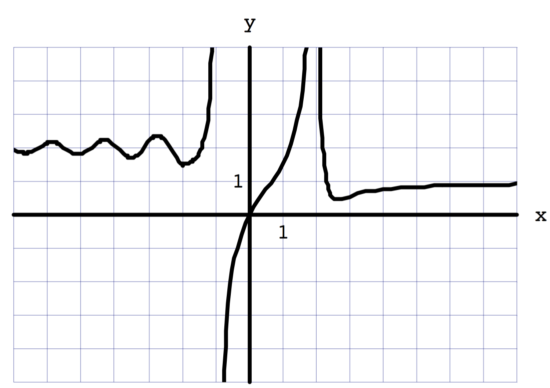
(b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

(e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas.



42. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales a las gráficas de cada una de las siguientes funciones. Represente gráficamente.

(a) $f(x) = \frac{x}{x+4}$

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

(c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$

(d) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

(e) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$

(f) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+4}$

(g) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$ (h) $f(x) = \frac{-x^2+x+2}{(x-1)^3}$

43. Halle una fórmula para una función f que tenga asíntotas verticales de ecuación $x = 1$ y $x = 3$, y asíntota horizontal de ecuación $y = 1$.