Trabajo práctico Nº 3 **Cálculo II (M102) 2013**

Ejercicio 1.

A. En cada uno de los casos siguientes, sea S el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen las desigualdades dadas. Hacer un gráfico mostrando el conjunto S y **explicar**, geométricamente, si S es o no abierto. Indicar la frontera de S.

a. $x^2 + y^2 < 1$ b. $|x| \leq 1 \;\; y \;\; |y| < 1$

B. En cada uno de los casos siguientes, sea S el conjunto de todos los puntos (x, y, z) del espacio tridimensional que satisfacen las desigualdades dadas y **determinar** si S es o no abierto.

a. $x + y + z < 1$ b. $|x| \leq 1 \;;\; |y| < 1 \;\; y \;\; |z| < 1$

C. **Demostrar** que los siguientes subconjuntos del plano son abiertos:

a. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x > 0\}$ b. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; -1 < x < 1 \;\; y \;\; -1 < y < 1\}$

Ejercicio 2.

A. Mostrar a partir de la definición que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$.

B. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{(x^2+1)(y^2+1)} \;,\; \frac{sen(x+y)}{(x-1)(y+1)}\right)$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$

d) $\lim_{(x,y,z,t)} \frac{x+y+z+t}{x^2+y^2+z^2+t^2}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$

f) $\lim_{t\to 0} \left(\sqrt{t+1} \;,\; \cos(t^2)e^{-\sqrt{t}} \;,\; \frac{\cos(t)}{t}\right)$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$

C. Utilizar un cambio de coordenadas para calcular los siguientes límites

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ b) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

Ejercicio 3.

A. Analizar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = \cos(y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x, y) = \frac{x-2y}{x^2+y^2}$

c) $f(x, y, z) = \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2-z^2}$

d) $f(x, y, z) = xe^{xz}$ en $(2, 1, 0)$

e) $f(x, y) = \left(\frac{sen(xy)}{xy} \;,\; \frac{sen(x^2-y^2)}{x^2-y^2} \;,\; \cos(xy)\right)$

f) $r(t) = \left(\frac{|t-2|}{t-2} \;,\; \frac{sen(\pi t)}{t^2-1} \;,\; \frac{tan(\pi t)}{t-1}\right)$

B. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas, demostrar que las funciones

$$f^2g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;, \mathbf{x} \to [f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad f^2 + g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;, \mathbf{x} \to [f(\mathbf{x})]^2 + g(\mathbf{x}) \quad \text{son continuas}$$

C. Determinar si cada una de las siguientes declaraciones es falsa o verdadera. Explicar el razonamiento:

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 4 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 2} f(x, 3) = 4$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x, 3) = 4 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 4$

D. Si $f(2,3) = 4$ ¿se puede **concluir** algo acerca de $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y)$? Dar razones que justifiquen su respuesta.

Ejercicio 4.

A. Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de las funciones

a) $f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$ b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ c) $z = e^{xy}$

d) $h(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e) $z = \tan\,(2x - y)$

B. Evaluar f_x y f_y de $f(x,y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ en el punto $(2,-2)$

C. Calcular las derivadas parciales de primer orden con respecto a x, a y y a z de $G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

D. Para $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$ encontrar todos los valores de x y y tal que $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$ simultáneamente.

E. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$ y determinar $f_{xy}(-1\,,2)$.

F. Mostrar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función dada por $f(x,y,z) = ye^x + x\ln z$

G. Determine si existe o no una función $f(x,y)$ cuyas derivadas parciales son $f_x = -3\,sen(3x-2y)$ y $f_y = 2\,sen(3x-2y)$. Explicar el razonamiento. Si tal función existe, dar un ejemplo.

H. Demuestre que la función $f(x,y) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ es una solución de la ecuación de Laplace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

I. Calcular la matriz de derivadas parciales de las funciones siguientes:

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,y)$

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xe^y + \cos\,(y)\,, x\,, x + e^y)$

c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (xe^z + y\,,\ yx^2)$

d) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xye^{xy} \\ x\,sen\,y \\ 5xy^2 \end{bmatrix}$

e) $f(x,y) = (e^x, sen(xy))$

f) $f(x,y) = (x-y, y+z)$

Ejercicio 5.

A. Mostrar que cada una de las siguientes funciones es diferenciable en cada punto de su dominio. Decir cuáles de las funciones son C^1.

a) $f(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ b) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ c) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

B. Probar que las siguientes funciones son diferenciables y hallar sus derivadas en un punto arbitrario:

a) $f: R^2 \to R;\ (x,y) \to x + y$ b) $f: U \to R\,;\,(x,y) \to \sqrt{1-x^2-y^2};\, U = \{(x,y);\ x^2+y^2 < 1\}$

c) $r(t) = (2sen(t)\quad ,\quad 3\cos\,(t))$ d) $F(x,y) = \left(ye^x\quad ,\quad xcos(y) - ycos(x)\ ,\ \frac{x^2}{y}\right)$

Ejercicio 6.

A. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en $(3\,,1\,,10)$.

B. ¿Dónde cruza al eje z el plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1\,,1\,,1)$?

C. ¿Por qué podrían llamárselas gráficas $f(x,y)=x^2+y^2$ y $g(x,y)$= $-x^2-y^2+xy^3$ "tangentes" en $(0\,,0)$?

Ejercicio 7.

> **TEOREMA 11: REGLA DE LA CADENA.** *Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ y $V \subset \mathbf{R}^m$ abiertos. Sean $g\colon U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $f\colon V \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ funciones dadas tales que g manda a U en V, de modo que está definida $f \circ g$. Suponer que g es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y que f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*
>
> $$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \qquad (1)$$
>
> *El lado derecho es una matriz producto.*

A. Escribir la regla de la cadena para cada una de las siguientes funciones y justificar la respuesta en cada caso usando el teorema 11.
   (a) $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x,y)=f\big(x,u(x,y)\big)$
   (b) $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x)=f(x,u(x),v(x))$
   (c) $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x,y,z)=f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$

B. Verificar el primer caso especial de la regla de la cadena para la composición $f\circ c$ en cada uno de estos casos:
   (a) $f(x,y)=xy$, $c(t)=(e^t,\cos(t))$
   (b) $f(x,y)=e^{xy}$, $c(t)=(3t^2,\ t^3)$
   (c) $f(x,y)=(x^2+y^2)log\sqrt{x^2+y^2}$, $c(t)=(e^t,e^{-t})$

C. Verificar la regla de la cadena para $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ y $f(x,y)=\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$; $u(x,y)=e^{-x-y}$; $v(x,y)=e^{xy}$

Ejercicio 8.

A. Si $f\colon U\subset R^n\to R$ es diferenciable, probar que $\boldsymbol{x}\to f^2(\boldsymbol{x})+2f(\boldsymbol{x})$ también es diferenciables, y calcular su derivada en términos de $\mathbf{D}f(\boldsymbol{x})$.

B. Sea $f\colon R^3\to R$ diferenciable. Hacer las sustituciones

$$x=\rho\cos\phi\ sen\,\theta \quad ; \quad y=\rho\,\text{sen}\,\phi\ cos\,\theta \quad ; \quad z=\rho\cos\,\theta$$

(coordenadas esféricas) en $f(x,y,z)$ y calcular $\frac{\partial f}{\partial\rho}$, $\frac{\partial f}{\partial\theta}$, $\frac{\partial f}{\partial\phi}$

C. Sean $f(u,v)=(\tan(u-1)-e^v,u^2-v^2)$ y $g(x,y)=(e^{x-y},x-y)$. Calcular $f\circ g$ y $D(f\circ g\,)(1\,,1)$

D. Encontrar $\left({}^{\partial}/_{\partial s}\right)(f\circ T)(1{,}0)$, donde $f(u,v)=\cos u\ sen\ v$ y $T(s,t)=(\cos(t^2s)\,,\log\sqrt{1+s^2}\,)$

E. Sea $f\colon R^2\to R^2$; $(x,y)\to(e^{x+y},e^{x-y})$. Sea $c(t)$ una curva con $c(0)=(0\,,0)$ y $c'(0)=(1\,,1)$. ¿Cuál es el vector tangente a la imagen de $c(t)$ bajo f en $t=0$?

D. Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de las funciones (opcional)
   a) $f(x,y)=(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$ b) $f(x,y)=x\cos(x)\cos(y)$ c) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$