## Trabajo práctico Nº 3

**Cálculo II (M102) 2012**

1) En cada uno de los casos siguientes, sea $S$ el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ del plano que satisfacen las desigualdades dadas. Hacer un gráfico mostrando el conjunto S y **explicar**, geométricamente, si S es o no abierto. Indicar la frontera de S.
   (a) $x^2 + y^2 < 1$ (b) $3x^2 + 2y^2 < 6$ (c) $xy < 1$ (d) $|x| \leq 1 \;\; y \;\; |y| < 1$
2) En cada uno de los casos siguientes, sea $S$ el conjunto de todos los puntos $(x, y, z)$ del espacio tridimensional que satisfacen las desigualdades dadas y **determinar** si S es o no abierto.
   (a) $z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0$ (b) $x + y + z < 1$ (c) $|x| \leq 1 \;;\; |y| < 1 \;\; y \;\; |z| < 1$
3) **Demostrar** que los siguientes subconjuntos del plano son abiertos:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x > 0\}$
   (b) $A = \{(x, y) \;/\; -1 < x < 1 \;\; y \;\; -1 < y < 1\}$

**4) Mostrar** partir de la definición que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$.

5) **Calcular** $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ . La gráfica de la se muestra en la Fig.1

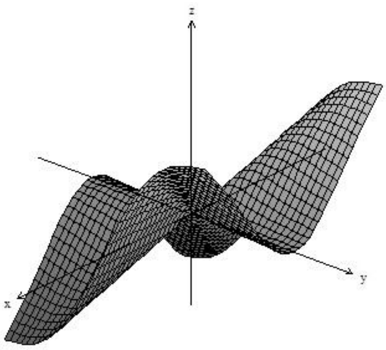
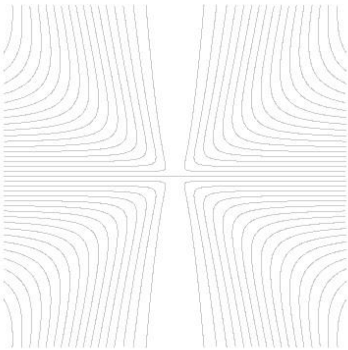



Fig. 1
Superficie $f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$



Curvas de nivel de $f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$

6) **Calcular**, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$

7) **Calcular**, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$ La gráfica de la función se muestra en la Fig.2. Mediante la observación de la gráfica, haga sus conclusiones.

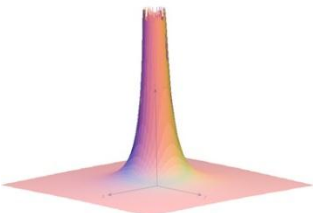


Fig. 2
Superficie $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

8) **Mostrar** que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ no existe. La gráfica de la se muestra en la Fig.3

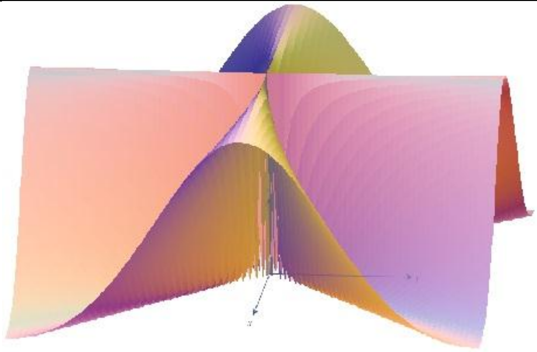


Fig. 3
$$f(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$$

9) **Hallar** los límites indicados sabiendo que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=4$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=3$
   (a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}[f(x,y)-g(x,y)]$ (b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{5f(x,y)}{g(x,y)}$ (c) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left[\frac{f(x,y)g(x,y)}{f(x,y)+g(x,y)}\right]$
10) **Utilizar** coordenadas polares para **calcular** los siguientes límites
   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos(x^2+y^2)$
11) **Utilizar** coordenadas esféricas para **calcular** los siguientes límites
   (a) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ (b) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} tan^{-1}\left[\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right]$
12) **Analizar** la continuidad de las siguientes funciones y analice si la continuidad es no evitable o removible:
   (a) $f(x,y)=\frac{1}{2}sen(x^2+y^2)$ (b) $f(x,y)=\cos(y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$
   (c) $f(x,y)=\frac{x-2y}{x^2+y^2}$ (d) $f(x,y)=\frac{2}{y-x^2}$
13) **Analizar** la continuidad de las siguientes funciones
   (b) $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$ (b) $f(x,y,z)=\frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2-z^2}$
   (c) $f(x,y,z)=xe^{xz}$ en $(2,1,0)$ (d) $f(x,y,z)=\sqrt{x+y+z}$ en $(1,3,4)$
14) Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ son continuas, demostrar que las funciones

$$f^2g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ ,\mathbf{x}\to[f(\mathbf{x})]^2g(\mathbf{x})\quad \text{y}\quad f^2+g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ ,\mathbf{x}\to[f(\mathbf{x})]^2+g(\mathbf{x})\quad \text{son continuas}$$

15) **Determinar** si cada una de las siguientes declaraciones es falsa o verdadera. Explicar el razonamiento:
   (a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)=4 \Rightarrow \lim_{x\to2} f(x,3)=4$
   (b) $\lim_{x\to2} f(x,3)=4 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)=4$
16) Si $f(2,3)=4$ ¿se puede **concluir** algo acerca de $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)$ ? Dar razones que justifiquen su respuesta.
17) Hallar las derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ de las funciones
   a) $f(x,y)=3x-x^2y^2+2x^3y$
   b) $f(x,y)=x^2y^3$
   c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
   d) $z=e^{xy}$
   e) $h(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$
   f) $z=x\sqrt{y}$
   g) $z=\tan(2x-y)$
   h) $f(x,y)=\int_x^y(t^2-1)dt$
18) Evaluar $f_x$ y $f_y$ en el punto dado:

a) $f(x,y) = xe^{x^2}$, en $(1, ln2)$
b) $f(x,y) = e^y sen\, x$ en $(\pi, 0)$
c) $f(x,y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ en $(2,-2)$

19) Calcular las derivadas parciales de primer orden con respecto a $x$, a $y$ y a $z$.
a) $H(x,y,z) = sen(x+2y+3z)$

20) $G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

21) Para $f(x,y)$ encontrar todos los valores de $x$ y $y$ tal que $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$ simultáneamente:
a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$
b) $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$

22) Hallar las pendientes en las direcciones de x y de y de la superficie dada por $f(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$ en el punto $(\frac{1}{2}, 1, 2)$.

23) Hallar las pendientes de la superficie dada por $f(x,y) = 1-(x-1)^2-(y-2)^2$ en el punto $(1,2,1)$, en las direcciones de $x$ y de $y$.

24) Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$ y determinar $f_{xy}(-1,2)$.

25) Mostrar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función dada por $f(x,y,z) = ye^x + x\ln z$

26) Determine si existe o no una función $f(x,y)$ cuyas derivadas parciales son $f_x = -3\,sen(3x-2y)$ y $f_y = 2\,sen(3x-2y)$ . Explicar el razonamiento. Si tal función existe, dar un ejemplo.

27) Demuestre que la función $f(x,y) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ es una solución de la ecuación de Laplace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

28) Hallar la diferencial total década función.
a) $z = 2x\,seny - 3x^2y^2$
b) $z = e^z sen\, y$
c) $w = x^2 + y^2 + z^2$
d) $w = 2z^3 y\, sen\, x$

29) Mostrar que las funciones dadas son diferenciable en cada punto de su dominio de definición.
a) $f(x,y) = x^2 + 3y$
b) $f(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
c) $f(x,y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2+y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$
d) $f(r,\theta) = \frac{1}{2} r\, sen\,(2\theta)$ , $r > 0$

30) Calcular la matriz de derivadas parciales de las funciones siguientes:
a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , $f(x,y) = (x,y)$
b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ , $f(x,y) = (xe^y + cosy, x, x + e^y)$
c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ , $f(x,y,z) = (xe^z + y,\ yx^2)$
d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ , $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xye^{xy} \\ x\,sen\,y \\ 5xy^2 \end{bmatrix}$

Los siguientes ejercicios han sido extraídos del libro Cálculo Vectorial 3ª. Ed de Marsden &Tromba (versión digital)

31)

Hallar $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ si
(a) $f(x,y) = xy$
$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y) = e^{xy}$
(c) $f(x,y) = x\cos x \cos y$
(d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

**Trabajo práctico Nº 3** **Cálculo II (M102) 2012**

32)

Evaluar las derivadas parciales $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ para las funciones dadas en los puntos indicados.

(a) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; $(0,0)$, $(a/2, a/2)$

$\boxed{\text{(b)}}$ $z = \log\sqrt{1+xy}$; $(1,2)$, $(0,0)$

(c) $z = e^{ax}\cos(bx+y)$; $(2\pi/b, 0)$

33)

En cada caso siguiente, hallar las derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$.

(a) $w = xe^{x^2+y^2}$ $\boxed{\text{(b)}}$ $w = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

(c) $w = e^{xy}\log(x^2+y^2)$ (d) $w = x/y$

(e) $w = \cos ye^{xy}\operatorname{sen} x$

34)

Mostrar que cada una de las funciones siguientes es diferenciable en cada punto de su dominio. Decir cuáles de las funciones son $C^1$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

(c) $f(r,\theta) = \frac{1}{2}r\operatorname{sen}2\theta, r>0$ (d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

35)

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en $(3,1,10)$.

36)

Calcular la matriz de derivadas parciales de

(a) $f(x,y) = (e^x, \operatorname{sen} xy)$ $\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$

(c) $f(x,y) = (x+y, x-y, xy)$ (d) $f(x,y,z) = (x+z, y-5z, x-y)$

37)

¿Dónde cruza al eje $z$ el plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1,1,1)$?

38)

¿Por qué podrían llamarse las gráficas de $f(x,y) = x^2+y^2$ y $g(x,y) = -x^2-y^2+xy^3$ "tangentes" en $(0,0)$?

39)

Sea $f(x,y) = e^{xy}$. Mostrar que $x(\partial f/\partial x) = y(\partial f/\partial y)$.

40)

Calcular los gradientes de las funciones siguientes:

(a) $f(x,y,z) = x\exp(-x^2-y^2-z^2)$ (Notar que $\exp u = e^u$.)

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ $\boxed{\text{(c)}}$ $f(x,y,z) = z^2e^x\cos y$

41)

Hallar la ecuación del plano tangente a $z = x^2 + 2y^3$ en $(1,1,3)$.

42)

**1.** Si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable, probar que $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ también es diferenciable, y calcular su derivada en términos de $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

43)

**2.** Probar que las siguientes funciones son diferenciables, y hallar sus derivadas en un punto arbitrario:

(a) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto 2$
$\boxed{\text{(b)}}$ $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto x+y$
(c) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto 2+x+y$
(d) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto x^2+y^2$
(e) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto e^{xy}$
$\boxed{\text{(f)}}$ $f: U \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}, U = \{(x,y) | x^2+y^2 < 1\}$
(g) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto x^4-y^4$

44)

**3.** Escribir la regla de la cadena para cada una de las siguientes funciones y justificar la respuesta en cada caso usando el teorema 11.

(a) $\partial h/\partial x$ donde $h(x,y) = f(x, u(x,y))$
$\boxed{\text{(b)}}$ $dh/dx$ donde $h(x) = f(x, u(x), v(x))$
(c) $\partial h/\partial x$ donde $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), w(x))$

**TEOREMA 11: REGLA DE LA CADENA.** *Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ y $V \subset \mathbf{R}^m$ abiertos. Sean $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $f: V \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ funciones dadas tales que $g$ manda a $U$ en $V$, de modo que está definida $f \circ g$. Suponer que $g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y que $f$ es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

*El lado derecho es una matriz producto.*

45)

**4.** Verificar la regla de la cadena para $\partial h/\partial x$ donde $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ y

$$f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2} \qquad u(x,y) = e^{-x-y}, \qquad v(x,y) = e^{xy}$$

46)

**5.** Verificar el primer caso especial de la regla de la cadena para la composición $f \circ \mathbf{c}$ en cada uno de estos casos:

(a) $f(x,y) = xy, \mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$
$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y) = e^{xy}, \mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$
(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}, \mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$
(d) $f(x,y) = x\exp(x^2+y^2), \mathbf{c}(t) = (t, -t)$

47)

$\boxed{\mathbf{6.}}$ ¿Cuál es el vector velocidad para cada curva $\mathbf{c}(t)$ en el ejercicio 5? (La solución a sólo la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

48)

**8.** Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ diferenciable. Hacer las sustituciones

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \rho\cos\phi$$

(coordenadas esféricas) en $f(x, y, z)$, y calcular $\partial f/\partial\rho$, $\partial f/\partial\theta$ y $\partial f/\partial\phi$.

49)

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Sean $f(u, v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$ y $g(x, y) = (e^{x-y}, x - y)$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1)$.

50)

**10.** Sea $f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \operatorname{sen}(u+v+w))$ y $g(x, y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$.

51)

**11.** Encontrar $(\partial/\partial s)(f \circ T)(1, 0)$, donde $f(u, v) = \cos u \operatorname{sen} v$ y $T(s, t) = (\cos(t^2 s), \log\sqrt{1+s^2})$.

52)

**12.** Suponer que la temperatura en el punto $(x, y, z)$ en el espacio es $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea una partícula que viaja por la hélice circular recta $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y sea $T(t)$ su temperatura en el tiempo $t$.

(a) ¿Cuál es $T'(t)$?

(b) Hallar un valor aproximado para la temperatura en $t = (\pi/2) + 0.01$.

53)

**13.** Suponer que un pato está nadando en el círculo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y que la temperatura del agua está dada por la fórmula $T = x^2 e^y - xy^3$. Hallar $dT/dt$, la tasa de cambio en temperatura que puede sentir el pato: (a) mediante la regla de la cadena; (b) expresando $T$ en términos de $t$ y diferenciando.

54)

**15.** Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$; $(x, y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sea $\mathbf{c}(t)$ una curva con $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ y $\mathbf{c}'(0) = (1, 1)$. ¿Cuál es el vector tangente a la imagen de $\mathbf{c}(t)$ bajo $f$ en $t = 0$?