Trabajo Práctico 3: Derivadas

1. Encuentre la derivada de la función f respecto de x en cada uno de los casos que se presentan a continuación:

   (a) $f(x) = 5x - 1$
   (b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$
   (c) $f(x) = x^{-2/5}$
   (d) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
   (e) $f(x) = 3x + 2e^x$
   (f) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$
   (g) $f(x) = 4\pi^2$
   (h) $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

2. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x + \frac{4}{x}$ en el punto $(2, 4)$. Ilustre x graficando la curva y la tangente en el mismo par de ejes coordenados.

3. Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

4. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4. Realice la gráfica de esta curva y de su derivada en el mismo par de ejes coordenados.

5. La recta normal a una curva C, en un punto P, es, por definición, la recta que contiene al punto P y es perpendicular a la recta tangente a C en P. Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto $(2, -3)$. Grafique la parábola y la recta normal.

6. Escriba una ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{2x}{x+1}$ en el punto $(1, 1)$.

7. La curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ se llama **bruja de María Agnesi**.

   (a) Encuentre una ecuación para la recta tangente a esta curva en el punto $(-1, \frac{1}{2})$.

   (b) Ilustre el inciso (a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en el mismo par de ejes coordenados.

8. Derive la función f respecto de x o respecto de t, según corresponda.

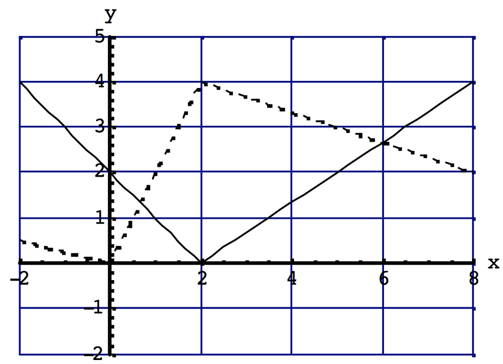
   (a) $f(x) = x^2e^x$
   (b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
   (c) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$
   (d) $f(t) = \frac{4t+5}{2-3t}$
   (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

9. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores de:

   (a) $(fg)'(5)$
   (b) $(\frac{f}{g})'(5)$
   (c) $(\frac{g}{f})'(5)$

10. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

11. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación, siendo f la gráfica representada con línea sólida y g la representada con línea de puntos. Sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Encuentre $u'(1)$ y $v'(5)$.



12. Una partícula se mueve según la ley de movimiento $s = f(t) = t^2 - 10t + 12$, $t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

    (a) Encuentre la velocidad en el instante t.

    (b) ¿Cuál es la velocidad después de $3s$?

    (c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?

    (d) ¿Cuándo se mueve hacia delante?

    (e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros $8s$.

    (f) Dibuje un diagrama para ilustrar el movimiento de la partícula.

13. La función de posición de una partícula está dada por $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 7t$, siendo $t \geq 0$. ¿Cuándo alcanza la partícula una velocidad de $5m/s$?

14. Sea f una función dada por $f(x) = \begin{cases} 2 - x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$.

    ¿Es f derivable en el valor 1? Haga las gráficas de f y f'.

15. Encuentre la derivada de la función f respecto de x o de t, según corresponda, en cada uno de los casos que se presentan a continuación:

    (a) $f(x) = x - 3\sin x$

    (b) $f(x) = x \sin x$

    (c) $f(x) = \sin x + \cos x$

    (d) $f(t) = t^3 \cos t$

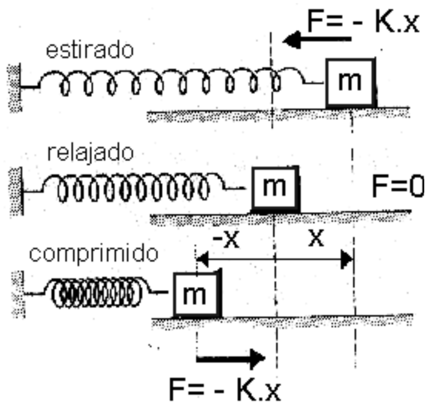
    (e) $f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

16. Pruebe que $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

17. Derive la identidad trigonométrica $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ para obtener una identidad nueva o conocida.

18. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \tan x$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, 1)$.

19. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada. Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8\sin t$, donde t está en segundos y x en centímetros.



(a) Encuentre la velocidad en el instante t.

(b) Halle la posición y la velocidad de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se mueve en ese instante?

20. Derive aplicando la regla de la cadena:

(a) $h(x) = (x^2 + 4x + 6)^5$

(b) $h(x) = \cos(\tan x)$

(c) $h(x) = e^{\sqrt{x}}$

(d) $h(t) = \sqrt{x^2 - 7x}$

(e) $h(x) = \cos(a^3 + x^3)$

(f) $h(x) = \left(\frac{y-6}{y+7}\right)^3$

(g) $h(x) = e^{x \cos x}$

(h) $h(x) = \frac{1+\sqrt{\sin(3x)}}{1-x+x^5}$

(i) $h(x) = \cos(x \sin x)$

(j) $h(x) = x^2 \cos(1/x)$

(k) $h(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

21. Halle todos los puntos de la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2\sin x + \sin^2 x$ la recta tangente es horizontal.

22. Suponga $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6) = 7$. Halle $F'(3)$.

23. Use la regla de la cadena para demostrar lo siguiente:

(a) La derivada de una función par es una función impar.

(b) La derivada de una función impar es una función par.

24. Decidir en qué puntos son derivables las siguiente funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -1 \\ x^2 & si \quad |x| < 1 \\ 2x+1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 7-x & si \quad x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1+4x & si \quad x \leq 2 \\ x^2-1 & si \quad 2 < x < 5 \\ 5x-1 & si \quad 5 \leq x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq -1 \\ x+2 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{4}x^2+3 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

25. Dada la ecuación $xy + 2x + 3x^2 = 4$:

    (a) Encuentre y' por derivación implícita.

    (b) Resuelva la ecuación en forma explícita para y, y luego derive para obtener y' en términos de x.

    (c) Compruebe que sus soluciones para los incisos (a) y (b) son consistentes, sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

26. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita siendo $y = f(x)$.

    (a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $x^2y + xy^2 = 3x$ (c) $4\cos x \sin x = 1$

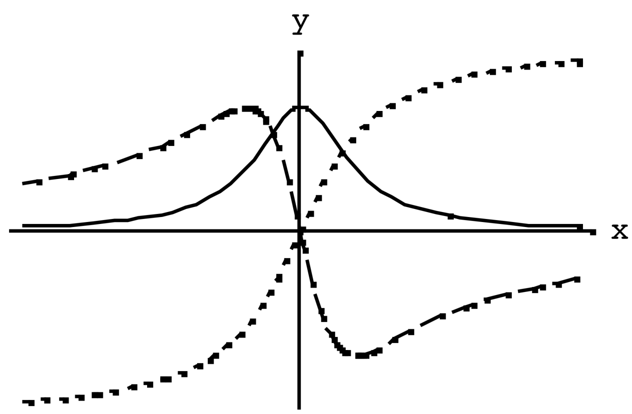
27. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $(-5, \frac{9}{4})$.

28. Halle la derivada de la función f en cada caso. Simplifique donde se pueda.

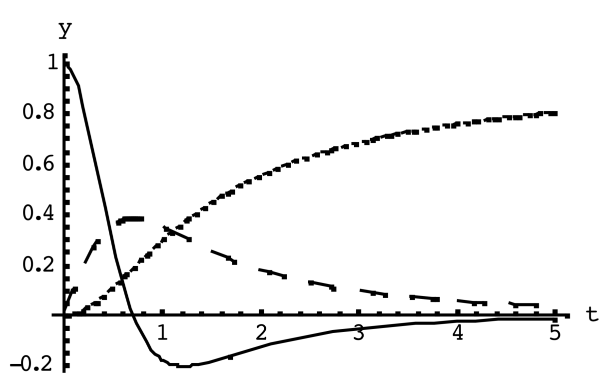
    (a) $f(x) = \sin^{-1} x^2$ (b) $f(x) = \tan^{-1} e^x$

29. Demuestre que las curvas $2x^2 + y^2 = 3$; $x = y^2$ son ortogonales.

30. La figura que se presenta a continuación muestra las gráficas de f, f', y f''. Identifique cada curva y explique sus elecciones.



31. La figura que sigue presenta las gráficas de tres funciones. Una es la función de posición de un automóvil; otra, la velocidad del mismo, y otra, su aceleración. Identifique cada curva y explique su elección.



32. Determine la primera y segunda derivada de la función f en cada uno de los casos que se presentan a continuación:

    (a) $f(x) = x^5 + 6x^2 - 7x$ (b) $f(\theta) = \cos(2\theta)$ (c) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

33. Determine la derivada tercera de $y = \sqrt{2x+3}$.
34. Si $f(x) = (2-3x)^{-1/2}$, determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.
35. Calcule la derivada segunda de $x^3 + y^3 = 1$ mediante derivación implícita.
36. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ en cada caso:

    (a) $f(x) = e^{2x}$ (b) $f(x) = \frac{1}{3x^3}$

37. Una partícula se mueve de acuerdo con una ley de movimiento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, $t \geq 0$, donde t es la medida en segundos y s en metros.
    (a) Encuentre la aceleración en el tiempo t y después de $3s$.
    (b) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$.
    (c) ¿Cuándo aumenta la partícula su velocidad? ¿Cuándo la reduce?
38. Una ecuación $y'' + y' - 2y = \sin x$ se llama **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida, en este caso y, y sus derivadas y' e y''. Encuentre las constantes A y B con las cuales la función $y = A\sin x + B\cos x$ satisfaga esta ecuación.
39. ¿Para qué valores de r satisface la función de ecuación $y = e^{rx}$ a la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?
40. Derive la función f respecto de x o θ, según corresponda, en cada caso:

    (a) $f(x) = \ln(2-x)$
    (b) $f(\theta) = \ln(\cos\theta)$
    (c) $f(x) = \cos(\ln x)$
    (d) $f(x) = e^x \ln x$

41. Encuentre y' e y'' de $y = x\ln x$.
42. Aplique derivada logarítmica para hallar la derivada de y en cada caso:

    (a) $y = x^x$, siendo $x > 0$ (b) $y = x^{\sin x}$, siendo $x > 0$ (c) $y = (\ln x)^{\cos x}$, siendo $x \geq 1$