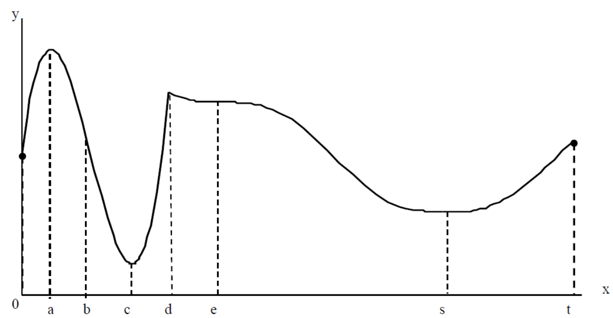
Cálculo I

1[er]cuatrimestre 2017

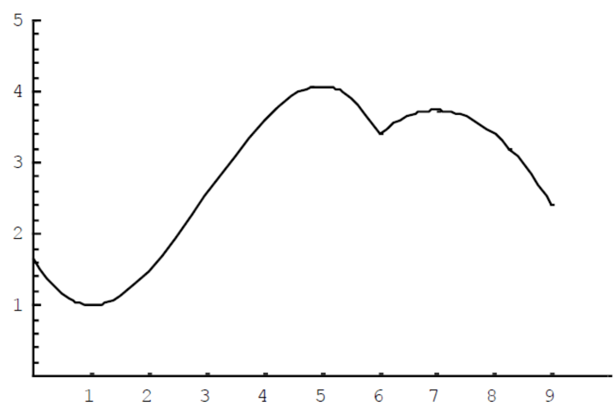
Trabajo Práctico 4: Aplicaciones de la Derivación

Valores extremos y relativos

1. Para cada uno de los números 0, a, b, c, d, e, s y t, diga si la función cuya gráfica se muestra tiene un máximo o un mínimo absolutos, un máximo o un mínimo relativos o no tiene máximo ni mínimo.



2. Utilice la gráfica de la función f para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y relativos de dicha función.



3. Dibuje la gráfica de una función que sea continua sobre $[0, 3]$ y tenga un máximo absoluto en 0, un mínimo absoluto en 3, un mínimo relativo en 1 y un máximo relativo en 2.

4. Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga:

   (a) Un máximo absoluto pero no mínimo absoluto.

   (b) Un máximo absoluto y un mínimo absoluto y sea discontinua.

5. Encuentre los valores críticos de la función.

(a) $f(x) = 8 - 3x$, $x \geq 1$ (b) $f(x) = x^2$, $-3 \leq x \leq 2$ (c) $f(\theta) = \sin\theta$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

6. En cada uno de los casos que se presentan a continuación, dibuje la gráfica de la función f y encuentre los máximos y mínimos relativos de la misma.

   (a) $f(t) = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 4$ (b) $g(x) = |2x + 3|$ (c) $h(x) = x \ln x$

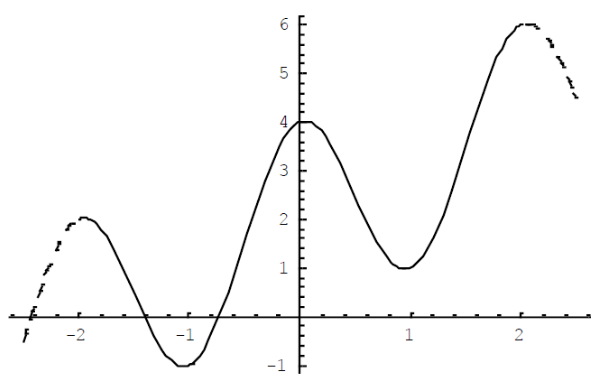
7. Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

   (a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$ (c) $f(x) = xe^{-x}$, $[0, 2]$

   (b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[0, 2]$

Teorema de Rolle y del Valor Medio

8. Compruebe que la función f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. A continuación determine todos los números c que satisfacen la conclusión de dicho teorema.
9. Sea $f(x) = (x - 1)^{-2}$. Demuestre que $f(0) = f(2)$ pero no existe un número c en $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?
10. Emplee la gráfica de f para estimar los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[-2, 2]$.



11. Sea $f(x) = |x - 1|$. Demuestre que no hay un valor de c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$ ¿Por qué esto no contradice el del teorema del valor medio?
12. (a) Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una raiz y sólo una.

    (b) Demuestre que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + m$ no posee 2 raíces distintas en $[0, 1]$.
13. Si f es una función tal que $f(1) = 10$, $f'(x)$ existe y $f'(x) \geq 2$ cuando $1 \leq x \leq 4$, ¿cuán pequeña puede ser $f(4)$?
14. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2$ para toda x?

15. Dos corredores arrancan al mismo tiempo en una competencia y terminan empatados. Demuestre que en cierto momento de la carrera tuvieron la misma velocidad. (Considere la siguiente sugerencia: defina $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones de posición de los dos corredores.)

Crecimiento y decrecimiento de funciones, criterio de la primera derivada, concavidad y puntos de inflexión

16. Use la gráfica de la función f para hallar lo siguiente.

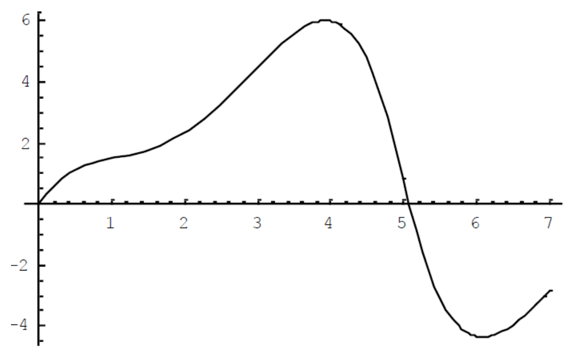
    (a) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde crece f.

    (b) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f decrece.

    (c) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f es cóncava hacia arriba.

    (d) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f es cóncava hacia abajo.

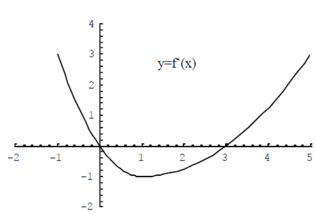
    (e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

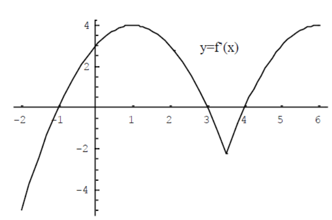


17. En cada uno de los casos que se presentan a continuación, se muestra la gráfica de la derivada f' de una función f. Responda:

    (a) ¿En qué intervalos es creciente o decreciente f?

    (b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo relativo?





18. En el gráfico que se muestra a continuación, aparece la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

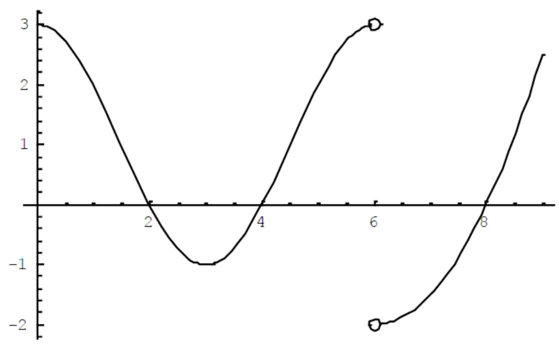
    (a) ¿En qué intervalos es creciente o decreciente f?

(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo relativo?

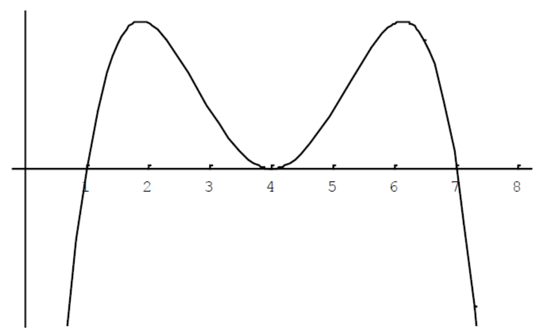
(c) ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba o abajo?

(d) Defina las abscisas de los puntos de inflexión.

(e) Sabiendo que $f(0) = 0$, trace una gráfica de $f(x)$



19. Se muestra la gráfica de la segunda derivada f'' de una función f. Diga cuáles son las abscisas de los puntos de inflexión. Justifique su respuesta.



20. Para cada una de las funciones que se indican a continuación, halle:

    (a) Los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

    (b) Los valores máximos y mínimos de f.

    (c) Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

        i. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

        ii. $f(x) = x - 2\sin x$, $0 < x < 3\pi$

        iii. $f(x) = xe^x$

21. Trace la gráfica de una función que satisfaga las condiciones en cada inciso:

    (a) $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$.

    (b) $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$.

    (c) $f''(x) < 0$ si $x < 0$, $f''(x) > 0$ si $x > 0$

22. Para la función f dada por $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

(a) Determine las asíntotas verticales y horizontales.

(b) Halle los intervalos de crecimiento o de decrecimiento.

(c) Encuentre los valores máximos y mínimos relativos.

(d) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

(e) Use la información de los incisos (a) al (d) para bosquejar la gráfica de f.

23. Para la función f dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq -1 \\ ax^3 + bx, & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 11x - 16, & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

    (a) Hallar a y b tales que la función sea continua en todos los números reales.

    (b) Analizar dónde la función es derivable.

    (c) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    (d) Encuentre los valores máximos y mínimos relativos y globales.

    (e) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

    (f) Use la información de los incisos (a) al (d) para bosquejar la gráfica de f.

24. Muestre que si $f(x) = x^4$ entonces $f''(0) = 0$ pero que el punto $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

Regla de L′ Hospital

25. Supóngase que:

    (a) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

    (b) $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

    (c) $\lim_{x \to a} h(x) = 1$

    (d) $\lim_{x \to a} p(x) = \infty$

    (e) $\lim_{x \to a} q(x) = \infty$

    ¿Cuáles de los siguientes límites son formas indeterminadas? Para los que no sean una forma indeterminada, evalúe el límite, si es posible hacerlo.

    (a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

    (b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

    (c) $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

    (d) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

    (e) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

    (f) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$

    (g) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

    (h) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

    (i) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$

    (j) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

    (k) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

    (l) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$

    (m) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$

    (n) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

    (o) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$

    (p) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$

    (q) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

26. Encuentre el límite aplicando la regla de L'Hopital donde resulte apropiado. Si existe un método más elemental, úselo. Si no puede aplicar la regla de L'Hopital, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^9-1}{x^5-1}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$

(e) $\lim_{x\to \pi} \frac{\tan x}{x}$

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^3}$

(g) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

(h) $\lim_{x\to \pi} (x-\pi)\cot x$

(i) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)$

(j) $\lim_{x\to \infty} x-\sqrt{x^2-1}$

(k) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

(l) $\lim_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$

27. Compruebe que valen las igualdades planteadas en (a) y (b).

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$, para cualquier número entero n.

Considere un ejemplo (un valor determinado de n entero) y verifique que vale la igualdad para ese ejemplo. Esta igualdad hace ver que la función exponencial tiende al infinito con mayor rapidez que cualquier potencia de x.

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ para cualquier número $p > 0$.

Considere un ejemplo (un valor determinado de $p > 0$) y verifique que vale la igualdad para ese ejemplo. Esta igualdad muestra que la función logarítmica tiende al infinito más despacio que cualquier potencia de x.

Trazado de curvas

28. Use los conocimientos adquiridos para trazar las siguientes curvas. Si la curva tiene una asíntota oblicua, dé su ecuación.

(a) $y = x^4 + 4x^3$

(b) $y = \frac{x}{x^2+9}$

(c) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(d) $y = x + 3x^{2/3}$

(e) $y = x\tan x$ con $-\pi/2 < x < \pi/2$

(f) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

(g) $y = e^x - x$

Problemas de Optimización

29. Considere el siguiente problema: Halle dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es máximo.

(a) Haga una tabla de valores, como la siguiente, de modo que la suma de los números de las dos primeras columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia mostrada por la tabla, estime la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

(b) Utilice el cálculo para resolver el problema y compare con la respuesta del inciso (a).

30. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de $100m$ de perímetro y área máxima posible?
31. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con área de $1.000m^2$, y perímetro lo menor posible?
32. ¿Un granjero quiere bordear un área de $457.200m^2$ en un campo rectangular y entonces dividirlo a la mitad con una barda paralela a un lado del rectángulo. ¿Cómo puede hacerlo para minimizar el costo de la barda?
33. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de $32.000cm^3$. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.
34. Si se cuenta con $1.200cm^2$ de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo de la caja.
35. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en un círculo de radio r.
36. Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.
37. Una lata cilíndrica sin tapa se hace para contener $V cm^3$ de líquido. Halle las dimensiones que minimicen el costo del material usado.

Ejercicios extras

1. Un punto material se mueve de acuerdo con las ecuaciones dadas en cada caso, donde s es su posición, v su velocidad y a su aceleración. Encuentre su posición en función del tiempo t.

   (a) $v(t) = \sin t - \cos t$, $s(0) = 0$

   (b) $a(t) = t - 2$, $s(0) = 1$, $v(0) = 3$

2. Demuestre que la suma de un número positivo y su recíproco es por lo menos 2.
3. (a) Demuestre que si $f'(x) \geq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$

   (b) Demuestre que si $f'(x) \leq m$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \leq f(a) + m(b - a)$

4. Sean $f, g : I \to \mathcal{R}$, derivables en todo punto del intervalo abierto I.

   (a) Si $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in I$, y $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

   (b) Muestre mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

(c) Demuestre que $2\sqrt{x} > 3 - 1/x$, cuando $x > 1$.

5. Con respecto al movimiento vertical de un móvil, convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo; en este caso las velocidades son positivas para cuerpos que se elevan y negativas para cuerpos que caen, y todos los cuerpos caen según la ley $s''(t) = 9,8$

   (a) Demuestre que s es de la forma $s(t) = -4,9t^2 + \alpha t + \beta$.

   (b) Haciendo $t = 0$ en la fórmula para s, y después en la fórmula para s', demuestre que $s(t) = -4,9t^2 + v_0 t + s_0$,
   donde s_0 es la altura desde la cual el cuerpo es soltado en el tiempo 0, y v_0 es la velocidad con cual se suelta.

   (c) Se lanza un peso hacia arriba con una velocidad de v metros por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura llegará? ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la aceleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?

6. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hopital?:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

   (El límite es, en realidad, -4.)

7. Halle los límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$

8. De una pieza rectangular de cartón de $25cm$ de largo y $10cm$ de ancho se recortan cuatro cuadrados de lado x en sus esquinas para hacer una caja con el remanente. Considerando los posibles valores de x, ¿cuál es el valor que hace máximo el volumen o capacidad de la caja (construida sin tapa)?

9. Dada la recta de ecuación $y = 3x + 7$, determine cuál de sus puntos está más próximo al origen de coordenadas.

10. Halle él o los puntos de la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ que estén más cerca del punto $(0, 2)$.