Trabajo práctico Nº4 **Cálculo II (M102) 2013**

Ejercicio 1:

A. Resolver:

a. Sea $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Calcular $\nabla f(x,y)$

b. Sean $f: R^3 \to R$ y g: $R^3 \to R$ diferenciables. Probar $\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$

B. Para las siguientes funciones $f: R^3 \to R$, $g: R \to R^3$ hallar ∇f y g' y evaluar $(f \circ g)'(1)$

a. $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $g(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

b. $f(x,y) = (x^2+y^2+z^2)log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $g(t) = (e^t, e^{-t}, t)$

Ejercicio2:

A. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados en las direcciones dadas:

a) $f(x,y) = log\sqrt{x^2+y^2}$ en $(x_0,y_0) = (1\,,0)$, $v = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$

b) $f(x,y) = xy^2 + x^3y$ en $(x_0,y_0) = (4\,,-2)$, $v = 1\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

B. Un alpinista se encuentra en el punto $P(-10\,,5,850)$ de una montaña descripta por la ecuación $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$ donde la distancia se mide en metros y el eje x apunta al este y el eje y apunta hacia el norte. Determinar:

a. La dirección de la ladera más pronunciada.

b. La razón a la que asciende o desciende el alpinista si se desplaza en la dirección este.

c. Las direcciones en las cuales se desplaza por una curva de nivel.

Ejercicio 3: Hallar trayectorias $\sigma(t)$que representen las siguientes curvas o trayectorias. Esbozar.

a. $\{(x,y) |\ y = e^x\}$

b. $\{(x,y) | 4x^2 + y^2 = 1\}$

c. Una recta en R^3que pasa por el origen y el punto $(a\,,b\,,c)$

B. Hallar los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas siguientes, en el valor dado de t.

a. $r(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + sen(2t)\mathbf{j}$, $en\ t = 0$

b. $\sigma(t) = (\mathrm{t\,sen}(t)\,, t\,cos(t), \sqrt{3}t)$, $en\ t = 0$

c. $\sigma(t) = \sqrt{2}\mathrm{t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $en\ t = 0$

C. Sea $\sigma: [a\,,b] \to R^3$ una trayectoria infinitamente diferenciable (existen derivadas de todos los órdenes). Suponer que $\sigma'(t) \neq 0$ para cualquier t. El vector $\frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = T(t)$ es tangente a σ en $\sigma(t)$ y, como $\|T(t)\| = 1$, T se llama tangente unitaria a σ.

a. Mostrar que $T'(t) \cdot T(t) = 0$. (Idea: Diferenciar $T(t) \cdot T(t) = 1$)

b. Escribir una fórmula en términos de σ para $T'(t)$.

Ejercicio 4:

A. Esbozar algunas líneas de flujo de los campos vectoriales:

a) $F(x,y) = (y\,,-x)$ b) $F(x\,,-y)$ c) $F(x\,,y) = (x\,,x^2)$

B. Mostrar que $\sigma(t) = (t^2, 2t-1\,,\sqrt{t})$ para $t > 0$ es una línea de flujo del campo vectorial de velocidad $F(x,y,z) = (y+1\,,\ 2\,,\frac{1}{2x})$

C. Mostrar que $F = y\cos(x)\,\mathbf{i} + x\,sen(y)\mathbf{j}$ no es un campo vectorial gradiente

Ejercicio 5:

A. Calcular la divergencia $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$ el rotacional $\boldsymbol{\nabla}\ \mathrm{x}\ \boldsymbol{F}$ de cada uno de los campos vectoriales dados.

1. $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
2. $F(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
3. $F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$
4. $F(x,y,z) = \frac{yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$

B. Sea $F(x,y,z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$
   a. Verificar que $rot\ \boldsymbol{F} = 0$
   b. Hallar una función f tal que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$.
   c. ¿Es cierto que para campo vectorial $\boldsymbol{F}$ puede existir dicha función f sólo si $rot\ \boldsymbol{F} = 0$?

C. Verificar que $F = yi + xj$ es incompresible. ¿Puede interpretar físicamente este resultado?

<u>Ejercicio 6</u>:

Determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función dada alrededor del punto (x_0, y_0)

a) $f(x,y) = (x+y)^2$, $(x_0,y_0) = (0,0)$ y $(x_0,y_0) = (1,1)$
b) $f(x,y) = e^{x+y}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$ y $(x_0,y_0) = (1,1)$

<u>Ejercicio 7</u>:

A. Hallar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.
   1. $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 10x - 10y - 28$
   2. $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$
   3. $f(x,y) = (x^2 + 4y^2)e^{1+x^2-y^2}$
   4. $z = e^{-x} sen(y)$

B. Hallar los valores máximos y mínimos absolutos para $f(x,y) = sen(x) + \cos(y)$en el rectángulo R definido $0 \le x \le 2\pi$; $0 \le y \le 2\pi$

C. Obtener los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 - yz + 2z^2 + 10$ e indicar su naturaleza.

D. Hallar el máximo y el mínimo absolutos para la función $f(x,y,z) = x + y - z$ en la bola $B = \{(x,y,z) |\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$