Trabajo práctico Nº4 PARTE 1 **Cálculo II (M102) 2012**

Los siguientes ejercicios han sido extraídos del libro Cálculo Vectorial 3ª. Ed de Marsden &Tromba (versión digital)

1)

7. Sean $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ diferenciables. Probar que

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

2)

16. Sea $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Calcular $\nabla f(x,y)$.

3)

Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Calcular $\nabla f(0,0,1)$.

4)

2. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados en las direcciones dadas:

(a) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$, $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (1,0)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$

(c) $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $(x_0,y_0) = (0,-1)$, $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$

(d) $f(x,y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0,y_0) = (4,-2)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{10})\mathbf{i} + (3/\sqrt{10})\mathbf{j}$

5)

13. Para las siguientes funciones $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{g}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, hallar ∇f y $\mathbf{g}'$ y evaluar $(f \circ \mathbf{g})'(1)$.

(a) $f(x,y,z) = xz + yz + xy$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$

$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

(c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, e^{-t}, t)$

6)

3. Hallar los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas siguientes, en el valor dado de t.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}, t = 0$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t\operatorname{sen} t, t\cos t, \sqrt{3}t), t = 0$

(c) $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, t = 0$

(d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}, t = 9$

7)

8. Hallar trayectorias $\boldsymbol{\sigma}(t)$ que representen las siguientes curvas o trayectorias. Esbozar.

(a) $\{(x,y) | y = e^x\}$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\{(x,y) | 4x^2 + y^2 = 1\}$

(c) Una recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen y el punto (a,b,c)

(d) $\{(x,y) | 9x^2 + 16y^2 = 4\}$

8)

2. La función de longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\boldsymbol{\sigma}(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\|\, d\tau$, representa la distancia que una partícula viajando por la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$ habrá recorrido en el tiempo t si comienza en el tiempo a; esto es, da la longitud de $\boldsymbol{\sigma}$ entre $\boldsymbol{\sigma}(a)$ y $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Hallar las funciones de longitud de arco para las curvas $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$ y $\boldsymbol{\beta}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, con $a = 0$.

9)

3. Sea $\boldsymbol{\sigma}$ la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (2t, t^2, \log t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \log 2)$.

10)

$\boxed{\textbf{6.}}$ Sea $\boldsymbol{\sigma}: [a, b] \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria infinitamente diferenciable (existen derivadas de todos los órdenes). Suponer que $\boldsymbol{\sigma}'(t) \neq \mathbf{0}$ para cualquier t. El vector $\boldsymbol{\sigma}'(t)/\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \mathbf{T}(t)$ es tangente a $\boldsymbol{\sigma}$ en $\boldsymbol{\sigma}(t)$ y, como $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, $\mathbf{T}$ se llama *tangente unitaria* a $\boldsymbol{\sigma}$.

(a) Mostrar que $\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$. (IDEA: Diferenciar $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$.)

(b) Escribir una fórmula en términos de $\boldsymbol{\sigma}$ para $\mathbf{T}'(t)$.

11)

2. Esbozar algunas líneas de flujo de los campos vectoriales

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ (c) $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$

12)

7. Mostrar que $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, 2t - 1, \sqrt{t})$ para $t > 0$ es una línea de flujo del campo vectorial de velocidad $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1, 2, 1/2z)$.

13)

1. Calcular el rotacional, $\nabla \times \mathbf{F}$, de cada uno de los siguientes campos vectoriales:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$

14)

$\boxed{\textbf{2.}}$ Calcular la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F}$ de cada uno de los campos vectoriales en el ejercicio 1. (La solución sólo a la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

15)

5. Verificar que $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es incompresible.

¿Pueden interpretar físicamente este resultado?

16)

6. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3+y^3)\mathbf{j}$.

(a) Verificar que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. (En el capítulo 8 se dan técnicas específicas para construir f en general. La de este problema deberá ser directa.)

(c) ¿Es cierto que para un campo vectorial $\mathbf{F}$ puede existir dicha función f sólo si $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$?

17)

9. Mostrar que $\mathbf{F} = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$ *no* es un campo vectorial gradiente.

18)

11. Evaluar todas las primeras y segundas derivadas parciales de las funciones siguientes:

(a) $f(x,y) = x\arctan(x/y)$

(b) $f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$

19)

15. Una función $u = f(x,y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisfaga la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama *función armónica*. Mostrar que la función $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica.

20)

En los ejercicios 1 al 6, determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función dada alrededor del punto dado (x_0, y_0).

1. $f(x,y) = (x+y)^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

21)

3. $f(x,y) = e^{x+y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

En los ejercicios 1 al 16, hallar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

22)

5. $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$