Trabajo práctico Nº5 **Cálculo II (M102) 2012**

Los siguientes ejercicios han sido extraídos del libro Cálculo Vectorial 3ª. Ed de Marsden &Tromba (versión digital)

EJERCICIO N°1

Evaluar las integrales dobles en los ejercicios 7 al 9, donde R es el rectángulo $[0,2] \times [-1,0]$.

7. $\int_R (x^2y^2 + x)\, dy\, dx$

$\boxed{\textbf{8.}}$ $\int_R (|y| \cos \frac{1}{4}\pi x)\, dy\, dx$

9. $\int_R (-xe^x \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi y)\, dy\, dx$

EJERCICIO N°2

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0,1] \times [0,1]$.

(a) $\int_R (x^3 + y^2)\, dA$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\int_R ye^{xy}\, dA$

(c) $\int_R (xy)^2 \cos x^3\, dA$ (c) $\int_R \ln[(x+1)(y+1)]\, dA$

EJERCICIO N°3

4. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

EJERCICIO N°4

$\boxed{\textbf{5.}}$ Sean f continua en $[a,b]$ y g continua en $[c,d]$. Mostrar que

$$\int_R [f(x)g(y)]\, dx\, dy = \left[\int_a^b f(x)\, dx\right] \left[\int_c^d g(y)\, dy\right],$$

donde $R = [a,b] \times [c,d]$.

EJERCICIO N°5

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas y trazar las regiones D determinadas por los límites. Decir si las regiones son del tipo 1, del tipo 2 o de ambos tipos.

(a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\, dx$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\, dx$

(c) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)\, dy\, dx$ (d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy\, dx$

EJERCICIO N°6

$\boxed{4.}$ Usar integrales dobles para determinar el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

EJERCICIO N°7

$\boxed{7.}$ Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\int_D x^3 y \, dx \, dy.$$

EJERCICIO N°8

15. Sea D una región dada como el conjunto de (x, y) con $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde ϕ es una función no negativa continua en el intervalo $[a, b]$. Sea $f(x, y)$ una función definida en D, tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Hacer ver que $\int_D f(x, y) \, dA = 0$.

EJERCICIO N°9

1. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y evaluar las integrales de las dos maneras.

(a) $\int_0^1 \int_x^1 xy \, dy \, dx$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta \, dr \, d\theta$

EJERCICIO N°10

8. Calcular $\int_D f(x, y) \, dA$, donde $f(x, y) = y^2\sqrt{x}$ y D es el conjunto de (x, y) donde $x > 0$, $y > x^2$ y $y < 10 - x^2$.

EJERCICIO N°11

7. Sea D la región en el plano xy dentro del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Evaluar $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(x, y) = xy$ $\boxed{\text{(b)}}$ $f(x, y) = x^2y^2$ (c) $f(x, y) = x^3y^3$

EJERCICIO N°12

En los ejercicios 17 al 19, integrar la función dada f sobre la región dada D.

17. $f(x, y) = x - y$; D es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,1)$.

EJERCICIO N°13

En los ejercicios 20 y 21, esbozar la región de integración, intercambiar el orden y evaluar.

21. $\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x + y^2)\, dx\, dy$

EJERCICIO N°14

3. Evaluar $\int_W (2x + 3y + z)\, dV$, donde $W = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

EJERCICIO N°15

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Evaluar $\int_W x^2 \cos z\, dV$ donde W es la región acotada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

EJERCICIO N°16

$\boxed{\mathbf{10.}}$ Hallar el volumen de la región acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 10 - x^2 - 2y^2$. Esbozar.

EJERCICIO N°17

12. Evaluar $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \operatorname{sen} 2\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$.

EJERCICIO N°18

17. Evaluar $\iiint_S xyz\, dx\, dy\, dz$, donde S es la región determinada por las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

EJERCICIO N°19

1. Sea $S^* = (0,1] \times [0, 2\pi)$ y definir $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$. Determinar el conjunto imagen S. Mostrar que T es uno a uno en S^*.

EJERCICIO N°20

3. Sea $D^* = [0,1] \times [0,1]$ y definir T en D^* por $T(u,v) = (-u^2 + 4u, v)$. Hallar D. ¿Es T uno a uno?

EJERCICIO N°21

1. Sea D el círculo unitario. Evaluar

$$\int_D \exp(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

haciendo un cambio de variables a coordenadas polares.

EJERCICIO N°22

$\boxed{\textbf{2.}}$ Sea D la región $0 \le y \le x$ y $0 \le x \le 1$. Evaluar

$$\int_D (x + y)\, dx\, dy$$

haciendo el cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Verificar la respuesta obtenida evaluando directamente la integral, usando una integral iterada.

EJERCICIO N°23

3. Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ la función definida por $T(u,v) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0,1] \times [1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y evaluar

(a) $\int_D xy\, dx\, dy$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\int_D (x - y)\, dx\, dy$

haciendo un cambio de variables para evaluarlas como integrales sobre D^*.

EJERCICIO N°24

9. Evaluar $\int_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dx\, dy$ donde D es el disco $x^2 + y^2 \le 4$.

EJERCICIO N°25

10. Sea D^* una región del tipo 1 en el plano uv acotado por

$$v = g(u), \qquad v = h(u) \leq g(u)$$

para $a \leq u \leq b$. Sea $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la transformación dada por

$$x = u, \qquad y = \psi(u, v),$$

donde ψ es de clase C^1 y $\partial\psi/\partial v$ nunca es cero. Suponer que $T(D^*) = D$ es una región del tipo 1; mostrar que si $f: D \to \mathbf{R}$ es continua, entonces

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right| du\, dv.$$

EJERCICIO N°26

19. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

EJERCICIO N°27

21. Sea B la bola unitaria. Evaluar

$$\int_B \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

haciendo el cambio de variables apropiado.

EJERCICIO N°27

1. Evaluar las siguientes integrales, en caso de que existan.

(a) $\displaystyle\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\, dA, \qquad D = [0, 1] \times [0, 1]$

EJERCICIO N°28

2. $\boxed{\text{(a)}}$ Analizar cómo se definiría $\int_D f\, dA$ si D es una región no acotada, por ejemplo, el conjunto de (x, y) tales que $a \leq x < \infty$ y $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, donde están dadas $\phi_1 \leq \phi_2$ (figura 6.5.4).

(b) Evaluar $\int_D xye^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ si $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$.

EJERCICIO N°29

1. Sea $f(x,y,z)=y$ y $\sigma(t)=(0,0,t), 0\le t\le 1$. Probar que $\int_{\sigma} f\,ds = 0$.

EJERCICIO N°30

2. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_{\sigma} f(x,y,z)\,ds$, donde

(a) $f(x,y,z)=x+y+z$ y $\sigma\colon t\mapsto(\operatorname{sen} t,\cos t,t), t\in[0,2\pi]$

$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y,z)=\cos z$, σ como en la parte (a)

(c) $f(x,y,z)=x\cos z, \sigma\colon t\mapsto t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}, t\in[0,1]$

EJERCICIO N°31

3. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_{\sigma} f(x,y,z)\,ds$, donde

(a) $f(x,y,z)=\exp\sqrt{z}$ y $\sigma\colon t\mapsto(1,2,t^2), t\in[0,1]$

$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y,z)=yz$ y $\sigma\colon t\mapsto(t,3t,2t), t\in[1,3]$

(c) $f(x,y,z)=(x+y)/(y+z)$ y $\sigma\colon t\mapsto(t,\frac{2}{3}t^{3/2},t), t\in[1,2]$

EJERCICIO N°32

5. Sea $f\colon \mathbf{R}^3\backslash\{\text{plano } xz\}\to\mathbf{R}$ definida por $f(x,y,z)=1/y^3$. Evaluar $\int_{\sigma} f(x,y,z)\,ds$ donde $\sigma\colon[1,e]\to\mathbf{R}^3$ está dada por $\sigma(t)=(\log t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

En los ejercicios 8 a 11 se trata la aplicación de la integral de trayectoria al problema de definir el valor promedio de una función escalar a lo largo de una trayectoria. Definir el número

$$\frac{\int_{\sigma} f(x,y,z)\,ds}{l(\sigma)}$$

como el **valor promedio** *de f a lo largo de σ. Aquí, $l(\sigma)$ es la longitud de la trayectoria:*

$$l(\sigma)=\int_{\sigma}\|\sigma'(t)\|\,dt.$$

(Esto es análogo al promedio de una función sobre una región, según se definió en la sección 6.4)

EJERCICIO N°33

9. Hallar la coordenada y promedio de los puntos en el semicírculo parametrizado por $\rho\colon[0,\pi]\to\mathbf{R}^3$, $\theta\mapsto(0,a\operatorname{sen}\theta,a\cos\theta)$; $a>0$.

EJERCICIO N°34

11. Sea $\boldsymbol{\sigma}$ la trayectoria dada por $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, t, 3)$ para $t \in [0,1]$.

(a) Hallar $l(\boldsymbol{\sigma})$, la longitud de la trayectoria.

(b) Hallar la coordenada y promedio a lo largo de la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$.

EJERCICIO N°35

1. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las trayectorias siguientes:

$\boxed{\text{(a)}}$ $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t,t,t)$, $0 \le t \le 1$ (b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$

(c) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $-1 \le t \le 2$

EJERCICIO N°36

2. Evaluar cada una de las integrales siguientes:

(a) $\int_{\boldsymbol{\sigma}} x\,dy - y\,dx$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$

(b) $\int_{\boldsymbol{\sigma}} x\,dx + y\,dy$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$, $0 \le t \le 2$

$\boxed{\text{(c)}}$ $\int_{\boldsymbol{\sigma}} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde $\boldsymbol{\sigma}$ está formada por los segmentos de recta que unen a $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$

(d) $\int_{\boldsymbol{\sigma}} x^2\,dx - xy\,dy + dz$, donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la parábola $z = x^2$, $y = 0$ de $(-1,0,1)$ a $(1,0,1)$.

EJERCICIO N°37

3. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

EJERCICIO N°38

$\boxed{\mathbf{7.}}$ Evaluar $\int_{\boldsymbol{\sigma}} y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$ para cada una de las trayectorias $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

EJERCICIO N°39 Y 40

$\boxed{\mathbf{14.}}$ ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C?

15. Evaluar $\int_C 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz$, donde C es una curva orientada simple que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.

EJERCICIO N°41

9. La imagen de $t \mapsto (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en el plano se muestra en la figura 7.2.15. Evaluar la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ alrededor de esta curva.

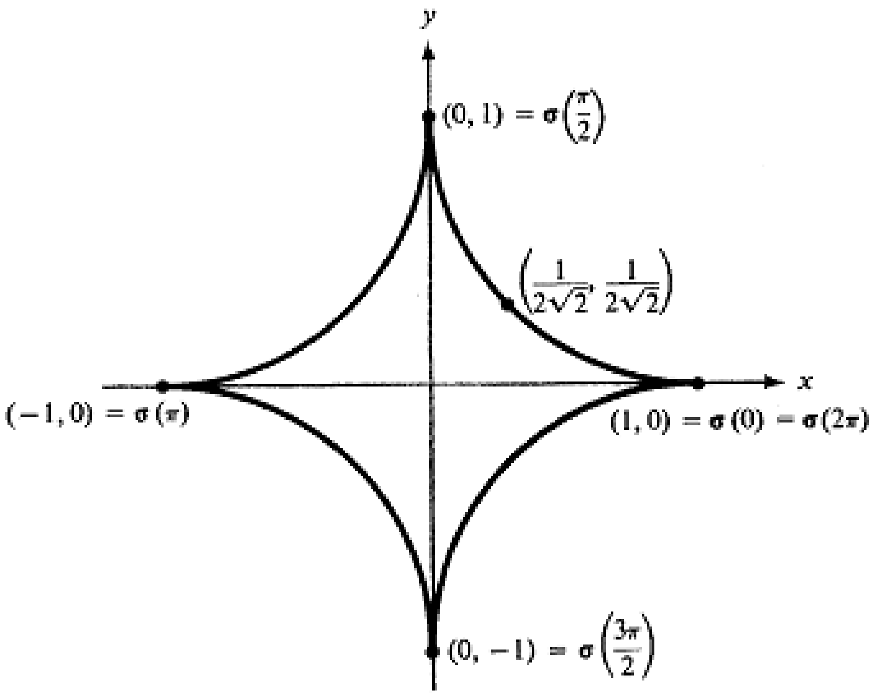

Figura 7.2.15 Hipocicloide $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ (ejercicio 9).

EJERCICIO N°42

En los ejercicios 1 al 3, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2$, en $(0, 1, 1)$

2. $x = u^2 - v^2, \qquad y = u + v, \qquad z = u^2 + 4v$, en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$

EJERCICIO N°43

5. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \operatorname{sen} u, \qquad y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \qquad z = \cos u$$

EJERCICIO N°44

7. Repetir el ejercicio 5 para la superficie

$$x = \operatorname{sen} v, \qquad y = u, \qquad z = \cos v$$

para $0 \leq v \leq 2\pi$ y $-1 \leq u \leq 3$.

EJERCICIO N°45

1. Hallar el área de la superficie de la esfera unitaria S representada paramétricamente por $\mathbf{\Phi}: D \to S \subset \mathbf{R}^3$, donde D es el rectángulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ y $\mathbf{\Phi}$ está dada por las ecuaciones

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi.$$

EJERCICIO N°46

5. Sea $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano uv. Hallar el área de $\mathbf{\Phi}(D)$.

EJERCICIO N°47

11. Hallar el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje y.

EJERCICIO N°48

1. Calcular $\int_S xy\, dS$ donde S es la superficie del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

EJERCICIO N°49

3. Evaluar $\int_S z\, dS$, donde S es el hemisferio superior de radio a, esto es, el conjunto de (x, y, z) con $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

EJERCICIO N°50

7. Evaluar $\int_S z\, dS$, donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

EJERCICIO N°51

3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2+y^2 \leq 1$ $z = 0$. Sea $\mathbf{E}$ el campo eléctrico definido por $\mathbf{E}(x, y, z) = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$. Hallar el flujo eléctrico a través de S. (IDEA: Romper S en dos partes S_1 y S_2 y evaluar $\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ por separado.)

EJERCICIO N°52

5. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$ y $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. (Hacer que n, la normal unitaria, apunte hacia arriba.)

EJERCICIO N°53

9. Hallar el flujo de $\mathbf{\Phi}(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ afuera de la esfera unitaria.

EJERCICIO N°54

15. Sea el campo de velocidad de un fluido, descrito por $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.