Trabajo Práctico 5

Interpolación y aproximación de funciones

Introducción:
Cuando se cuenta con una gran cantidad de datos experimentales, que contienen cierto error propio de los experimentos que los generan, los métodos numéricos permiten obtener funciones que representen de la mejor forma la tendencia de los datos. Esta práctica se denomina regresión o ajuste de funciones. Por otro lado, si se cuenta con datos cuyo error sea mínimo, se pueden determinar los valores intermedios mediante la interpolación.
En este trabajo práctico se exponen las diferencias entre los distintos métodos de interpolación y ajuste por mínimos cuadrados de conjuntos de datos y funciones contínuas.

Objetivos del trabajo práctico:
1. Entender los procesos involucrados en los algoritmos de interpolación y aproximación.
2. Aplicar métodos numéricos en problemas estudiados en Probabilidad y Estadística.
3. Desarrollar habilidades de programación.

Referencias:
- Capítulo 4 de Mathews J., Fink K.,"Métodos Numéricos con MATLAB", Prentice Hall, 2000.
- Capítulos 17 y 18 de Chapra S., Canale. R.,"Métodos Numéricos para Ingenieros", McGraw-Hill, 1999.
- Eaton J., Bateman D., Hauberg S., Wehbring R.,"GNU Octave – Free your numbers", 4 Ed, Free Software Foundation, 2016. https://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf
- Manual en línea de GNU Octave: https://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/index.html#SEC_Contents

Actividades:

Ejercicio 1

a) Para los siguientes datos experimentales, encuentre los polinomios interpolantes

X	Y_1	Y_2
0,0000	0,0000	1,0000
1,5708	1,0000	0,0000
3,1416	0,0000	-0,7304
4,7124	-1,0000	0,0000
6,2832	0,0000	0,5335
7,8540	1,0000	0,0000

b) Utilice los polinomios determinados en el punto a) para estimar los valores de Y_1 e Y_2 en las siguientes abscisas

X	0,7854	2,3562	3,927	5,4978	7,0686

c) Construya una tabla que incluya los datos originales más los puntos del inciso b. Determine el error relativo porcentual de las interpolaciones comparando con los valores exactos dados por las funciones Y_1=seno(x), Y_2=cos(x) $e^{(-x/10)}$

d) Incorpore el dato X=12,5664 Y_2=0,2846 al polinomio que representa a Y_2 y recalcule los errores del inciso c.¿Mejoró el error?

Ejercicio 2

Utilizando Octave repita el ejercicio 1 parte c mediante splines cúbicos naturales. Utilice el comando “interp1” con el parámetro “spline”. ¿Observa alguna mejora en el error?

Ejercicio 3

Encuentre la raíz del siguiente conjunto de datos. Para ello, primero calcule el polinomio interpolante por el método que prefiera y luego utilice un método de búsqueda de raíces.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	1,8421	2,4694	2,4921	1,9047	0,8509	-0,4112	-1,5727

Ejercicio 4

Utilizando globos aeroestáticos, se relevó la densidad del aire en distintas alturas. Encuentre la densidad en Mendoza (900m) y a la altura del Cristo redentor (4km).

Altura [km]	0	3	6
Densidad [kg/m3]	1,225	0,905	0,652

Ejercicio 5

En una encuesta sobre el peso de recién nacidos en un hospital se relevaron los siguientes resultados en libras.

4, 8, 4, 6, 8, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 9, 7, 6, 10, 8, 5, 9, 6, 3, 7, 6, 4, 7, 6, 9, 7, 4, 7, 6, 8, 8, 9, 11, 8, 7, 10, 8, 5, 7, 7, 6, 5, 10, 8, 9, 7, 5, 6, 5.

Genere un conjunto de clases y determine la frecuencia absoluta (número de veces que se registra el valor dividido por la cantidad total de resultados) de cada clase. Encuentre el polinomio que mejor ajusta a la tabla de frecuencias.

Ejercicio 6

Se registró que el precio y la demanda de un producto varía según la siguiente tabla. Determine el polinomio que mejor ajusta a los datos. Determine la demanda para $17.

Precio [$]	10	15	20	22	24
Demanda [unidades]	235	221	185	181	173

Ejercicios de programación

Ejercicio 7

a) Elabore un diagrama de flujos para el algoritmo de interpolación de Newton.

b) Escriba un código de Octave que ejecute el algoritmo del punto a). El programa debe aceptar como argumentos de entrada dos vectores de datos (X,Y) y otro vector con los puntos donde se evaluará el polinomio interpolante (XI). El argumento de salida debe ser el vector (YI).

c) Resuelva el ejercicio 1 parte a, compruebe los resultados y grafique el polinomio para 50 puntos.

Ejercicio 8

a) Elabore un diagrama de flujos para el algoritmo de aproximación por mínimos cuadrados.

b) Escriba un código de Octave que ejecute el algoritmo del punto a). El programa debe aceptar como argumentos de entrada dos vectores de datos (X,Y) y otro vector con los puntos donde se evaluará el polinomio interpolante (XI). El argumento de salida debe ser el vector (YI).

c) Aproxime por mínimos cuadrados la siguiente tabla de datos

X	0	1	2	3	4	5
Y	0	1	2	2	2	2

Determine la cantidad mínima de funciones base $\{X^0, X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ que cumpla $\|\hat{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}\|_\infty < 0{,}1$
Grafique los datos y las diferentes aproximaciones en un sólo gráfico.

Ejercicio 9

Aproxime los siguientes datos

X	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Y	3,4	0,9398	0,4499	0,8905	1,4	1,49	1,05	0,3405	0,0

utilizando la base $\{1, sen(X), \cos(X), sen(2X), \cos(2X), sen(3X), \cos(3X)\}$

Ejercicio 10

Aproxime por mínimos cuadrados el ejercicio 4, con un polinomio de primer orden y uno de segundo orden. Compare los resultados con los obtenidos en el ejercicio 4.