Trabajo Práctico 7

Ecuaciones Diferenciales

Introducción:
La solución de ecuaciones diferenciales es uno de los temas centrales del cálculo numérico. En este trabajo introductorio se utilizarán algunos de los métodos más comunes. Cabe resaltar que existe una gran cantidad de métodos numéricos para resolver estos problemas.

Objetivos del trabajo práctico:
1. Comprender la diferencia entre algoritmos explícitos e implícitos.
2. Analizar la convergencia de los métodos.
3. Desarrollar habilidades de programación.

Referencias:
- Capítulos 25 y 26 de Chapra S., Canale. R.,"Métodos Numéricos para Ingenieros", McGraw-Hill, 1999.
- Eaton J., Bateman D., Hauberg S., Wehbring R.,“GNU Octave – Free your numbers”, 4 Ed, Free Software Foundation, 2016. https://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf

Actividades:

Utilizando Octave escriba un algoritmo que encuentre la solución en cada ejercicio y produzca gráficas con los resultados. Demuestre la convergencia en cada caso para la discretización elegida como respuesta.

A) Problemas de contorno

Encuentre la solución de los siguientes problemas utilizando un esquema basado en aproximación por diferencias finitas de segundo orden.

Ejercicio 1: Conducción del calor

$$T''(r)+\frac{1}{r}T'(r)=0, r\in[1,2]$$

Con las condiciones de borde: $T'(1)=\frac{1000}{60{,}5}(T_0-400), T'(2)=-\frac{1000}{60{,}5}(T_n-100)$

Ejercicio 2: Velocidad del fluido entre dos cilindros en rotación

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}(r)\right)=\frac{v(r)}{r^2}, r\in[0.1, 0.11]$$

Con las condiciones de borde: $v(r_{interno})=29\, rad/s, v(r_{externo})=0$

Ejercicio 3: Transporte de una sustancia

$$10A'(x)=1\text{E-}3A''(x)$$

Con las condiciones de borde: $A(x_0)=10, A(x_1)=5$

B) Problemas de valores iniciales:

En los siguientes problemas, primero transforme las ecuaciones ordinarias de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden. A continuación se presenta un ejemplo genérico.

$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0$

primero se construye un vector con la variable y su primer derivada $Z=\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$

luego se deriva el vector $\dot{Z}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\dfrac{b\dot{x}+cx}{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Z_2 \\ -\dfrac{bZ_2+cZ_1}{a} \end{pmatrix}$

Entonces la solución del sistema se obtiene aproximando $Z^{(t+1)}=Z^{(t)}+(\Delta\mathrm{T})\dot{Z}$

Encuentre la solución en el tiempo con el algoritmo de Euler explícito, un método predictor-corrector y el método RK4.

Compare los resultados obtenidos mediante un gráfico de evolución temporal de la posición y un gráfico en el plano de fase (posición vs velocidad).

Ejercicio 5: Oscilaciones del péndulo simple

$\ddot{\theta}+9{,}81\cos\theta=0$

condiciones iniciales: $\theta(0)=0\,rad,\dot{\theta}(0)=0\,rad/s$

Tiempo final 80 segundos

Ejercicio 6: Oscilaciones de un sistema Masa – resorte - amortiguador

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

condiciones iniciales: $x(0)=1\,m,\dot{x}(0)=0\,m/s$

Tiempo final 100 segundos

a)m=1 ,k=1, c=0

b)m=1 ,k=1, c=0,1

c)m=1 ,k=1, c=1