Cálculo I

1^{er}cuatrimestre 2017

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Trabajo Práctico 8: Principio de inducción matemática, sucesiones y series de números reales

Inducción matemática

Utilice inducción matemática para demostrar que las siguientes relaciones se cumplen para todo $n \in \mathbb{N}_k$ iniciado desde cierto $k \in \mathbb{N}$. Determinar el valor de k.

1. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
2. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n + 1)$.
3. $2^n < n!$ donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$.
4. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
7. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.
8. $n^2 + n$ es par.
9. $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6.
10. $n < \frac{n^2-n}{12} + 2$.
11. $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ es divisible por 9.
12. $3n + 25 < 3^n$.
13. $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.
14. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$.
15. Sea $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para $n \geq 0$ (sucesión de Fibonacci). Entonces

$$f_n = \frac{1}{\sqrt(5)} \left[\left(\frac{1 + \sqrt(5)}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt(5)}{2} \right)^n \right]$$

Sucesiones y series de números reales

16. Dada las siguientes sucesiones:

$$\text{i) } a_n = \frac{n}{n+1},\ n \geq 0 \qquad \text{ii) } a_n = \frac{1-2n}{n^2},\ n \geq 1 \qquad \text{iii) } a_n = 3+5n,\ n \geq 1$$

   (a) Grafique los primeros términos de la sucesión.

   (b) Indique, a través de la observación de la gráfica anterior, a qué valor converge y pruebe por definición que dicho valor es correcto.

17. Calcule los siguientes límites de sucesiones utilizando propiedades. Justifique cada paso

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + \frac{2}{3n^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-\pi)^n}{5^n} + 3^{n/2}$.

18. Calcule el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, estudie la monotonía y grafique los primeros términos para cada una de las siguientes sucesiones:

   (a) $a_n = \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$

   (b) $a_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$

   (c) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$

   (d) $a_n = \left(\frac{2n-3}{2n+4}\right)^{\frac{n^2-2n}{n+1}}$

19. Enuncie el teorema del encaje o Sandwich y calcule el límite de las siguientes sucesiones:

   (a) $a_n = \frac{sen(n)}{n}$

   (b) $a_n = \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1}$

20. Probar el teorema de valor absoluto: Dada la serie a_n, si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

21. Para las series:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} a.r^n \text{ (serie geométrica)} \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \text{ (serie telescópica)}$$

   (a) Calcule la expresión general de la sucesión de sumas parciales.

   (b) Calcule, si existe, la suma de cada serie.

22. Utilizando el ejercicio anterior, indique si las siguientes series convergen o divergen. Si convergen, calcule su suma:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$$

23. Enuncie la condición necesaria de convergencia y luego analice si las siguientes series convergen o divergen:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4n^2+2} \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2+2)n!}{(n+2)!} \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+12}{2^n}$$

24. Enuncie el criterio de la integral y analice la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p, \; p \in \mathbb{R}.$$

25. Enuncie el criterio de comparación directa y en el limite. Luego analice la convergencia de las siguientes series:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(n+1)} \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

26. Enuncie el teorema de convergencia absoluta y condicional, y analice la convergencia de las siguientes series y diga si converge de forma absoluta o condicional:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1} \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}} \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

27. Enuncie el criterio del cociente y analice la convergencia de las siguientes series:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot n!} \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)} \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \qquad \text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

28. Enuncie el criterio de la raíz y analice la convergencia de las siguientes series:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n} \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$$

29. Defina serie de potencia e indique su intervalo de convergencia.

30. Analice el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencia:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1} \qquad \text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$$