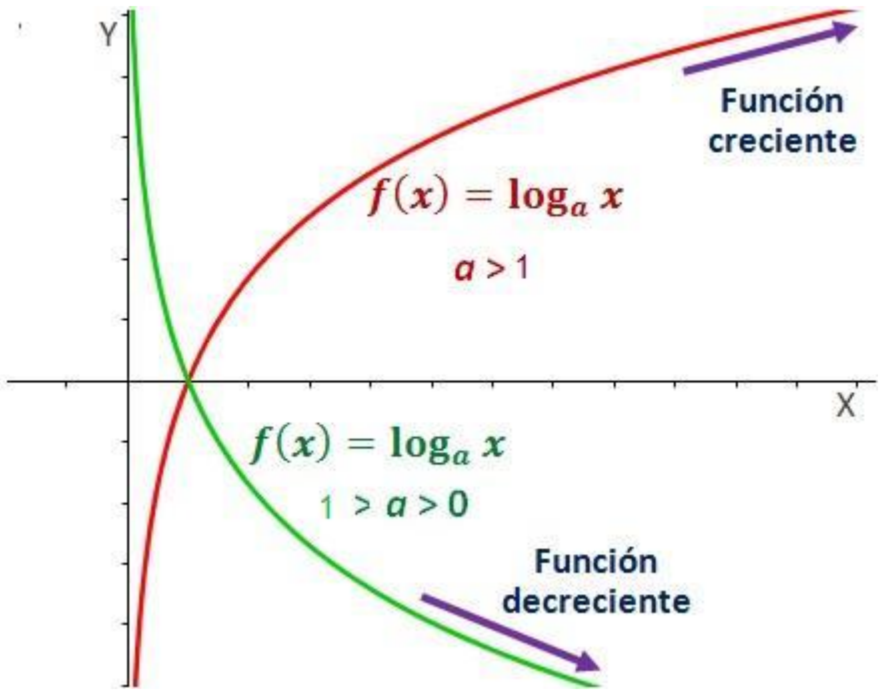
Ingreso 2020
Matemática



UNIDAD N°5 (parte B)
FUNCIÓN LOGARÍTMICA

A. LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1. Introducción

En la sección anterior vimos cómo es sencillo resolver una ecuación exponencial cuando es posible obtener en ambos miembros de la igualdad potencias de la misma base. Por ejemplo:

$$2^x = 64 \;\Rightarrow 2^x = 2^6 \;\Rightarrow x = 6 \;\Rightarrow S = \{6\}$$

En la sección anterior nunca resolvimos ecuaciones del tipo $5^x = 12$, pues es imposible obtener en ambos miembros potencias de la misma base.

Las funciones exponenciales tienen una base constante y un exponente variable. La inversa de la función exponencial es la función logarítmica.

Para abordar este tema, pasaremos inicialmente al estudio de los logaritmos como operación matemática, para después estudiar la función inversa de la exponencial, o sea, la función logarítmica.

2. Definición de logaritmo

Sean a, b y c números reales con $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.y $b \in \mathbb{R}_+^*$

Llamaremos al "*logaritmo en base a de* b $(\log_a b)$", al número real c, tal que $a^c = b$

Es bueno recordar la definición de logaritmo mediante el siguiente esquema.

obtenemos

$$\log_a b = \mathrm{c} \underset{def}{\Longleftrightarrow} a^c = b$$

elevada

donde:

- $\boldsymbol{a}$ es la base del logaritmo
- $\boldsymbol{b}$ es el logaritmando;
- $\boldsymbol{c}$ es el logaritmo;

Obtener el logaritmo de un número (en cualquier base) es una operación aritmética binaria, o sea que es la siguiente función:

$$log: \mathbb{R} \,\mathrm{X}\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(a, b) \to c = \log_a b \qquad (1)$$

Observemos que

$$a^c \underbrace{=}_{(1)} a^{\log_a(b)} \underbrace{=}_{por\ \mathrm{def}\ de\ logaritmo} b \qquad (2)$$

En los siguientes ejemplos:

$$2^{\log_2 5} = 5$$
$$e^{\ln 5} = 5$$

es común decir: “simplificamos la base con el logaritmo”. En realidad, sólo estamos usando la definición de logaritmo.

Recordemos entonces que:

> El logaritmo de un número positivo $\boldsymbol{b}$, en una cierta base $\boldsymbol{a}$ **,** positiva y diferente de 1, es el ***exponente*** al cual se debe elevar la base $\boldsymbol{a}$, de modo a obtener ese número $\boldsymbol{b}$.

Comparando esta última expresión con el ejemplo dado al comienzo, $5^x = 12$, podemos observar que $a = 5$ y $b = 12$, por lo que $x = \log_5 12$

Si bien no sabemos cuál es el valor de x, podemos afirmar que:

$$1 < x < 2$$

pues

$$5^1 < 12 < 5^2$$

Veremos más adelante una forma de calcular x, mediante un cambio de base (en este curso), o una serie de potencias (en Cálculo I)

Logaritmos Especiales:

Si la base es 10, colocamos simplemente $\log b$.
O sea, $\log b = x \underset{def}{\Longleftrightarrow} 10^x = b$
Si la base es el ya conocido número $\boldsymbol{e}$, usamos el siguiente símbolo $ln\ b$.
O sea, $\ln b = x \underset{def}{\Longleftrightarrow} e^x = b$
El símbolo "$ln\ b$" se lee: “logaritmo natural”.

Ejemplo 1

Determinar x en los siguientes casos:

a)$\log_5 5 = x$ b) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4} = x$ c) $\log_2 1 = x$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = x$

Solución

a) $\log_5 5 = x \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1}$

b) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4} = x \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1}$

c) $\log_2 1 = x \Rightarrow 2^x = 1 \underset{\mathbf{1=2^0}}{\Longrightarrow} 2^x = 2^0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \underset{\mathbf{1=\left(\frac{1}{2}\right)^0}}{\Longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

Podemos observar que:

- el logaritmo de la base es 1
- el logaritmo de 1 es cero independientemente de la base.

Ejemplo 2

Determinar x en los siguientes casos:

a) $\log_6 36 = x$ b) $\log_8 2 = x$

Solución

a) $\log_6 36 = x \Rightarrow 6^x = 36 \xrightarrow[36=6^2]{} 6^x = 6^2 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

b) $\log_8 2 = x \Rightarrow 8^x = 2 \xrightarrow[8=2^3]{} (2^3)^x = 2 \Rightarrow 2^{3x} = 2^1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 13. Complete según la definición de logaritmos:

$5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square$ = ...

$log_5 25 = 2$, entonces $\square^{\square}$ = ...

Ejercicio 14. Usando la definición de logaritmo, determine el valor de x (sin usar calculadora)

a) $\log_{10} 10 = x$ b) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = x$ c) $\log_{25} 1 = x$

d) $\log_{16} \sqrt{2} = x$ e) $\log_{0,01} 0,1 = x$

Ejercicio 15. Complete los espacios en blanco:

Fórmula logarítmica	Forma exponencial	Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$			$4^3 = 64$
$\log_8 64 = 2$		$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$8^{2/3} = 4$		$4^{3/2} = 8$
	$8^3 = 512$	$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$		$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$		$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

Ejercicio 16. Resuelva las siguientes expresiones, sin usar calculadora

a. $\log_3 \frac{1}{27} =$ *b.* $\log_{16} \sqrt{2} =$ *c.* $\log_4 \sqrt{2} =$

d. $\log_8 0.25 =$ *e.* $\log_{10} \sqrt{10} =$ *f.* $\log_{49} 7 =$

g. $\log_5 0.2 =$	*h.* $\log_9 \sqrt{3} =$	*i.* $ln\, e =$
j. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} =$	*k.* $\log_{\sqrt{2}} 4 =$	

Ejemplo 3:

Determinar el valor de x, siendo $x = \log_{\frac{1}{8}} 16$

Solución

$$\log_{\frac{1}{8}} 16 = x \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{8}\right)^x = 16 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{2^3}\right)^x = 2^4 \;\Rightarrow\; (2^{-3})^x = 2^4 \;\Rightarrow\; 2^{-3x} = 2^4 \;\Rightarrow$$

$$-3x = 4 \;\Rightarrow\; 3x = -4 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = -\frac{4}{3}}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 17. Encuentre el valor de x, sin usar calculadora.

a) $x = \log_{25} \sqrt[3]{5}$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = x$ c) $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}) = x$

Ejemplo 4

Determinar x en los siguientes casos:

a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 5 = \frac{1}{2}$ c) $\log_x 2 = \frac{3}{5}$ d) $\log_x 5 = -2$

Observe que, en este ejemplo, x es la base

Solución

a) $\log_x 8 = 3 \;\Rightarrow\; x^3 = 8 \Rightarrow\; x = \sqrt[3]{8} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = 2}$

b) $\log_x 5 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow\; \sqrt{x} = 5 \;\Rightarrow\; (\sqrt{x})^2 = 5^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = 25}$

c) $\log_x 2 = \frac{3}{5} \;\Rightarrow\; x^{\frac{3}{5}} = 2 \;\Rightarrow\; \sqrt[5]{x^3} = 2 \;\Rightarrow\; x^3 = 2^5 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = \sqrt[3]{25}}$

d) $\log_x 5 = -2 \;\Rightarrow\; x^{-2} = 5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2} = 5 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow\; \boldsymbol{x \underbrace{=}_{(*)} \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

$(*)$ En este caso, si $x^2 = \frac{1}{5}$ entonces $|x| = \sqrt{\frac{1}{5}}$, es decir $x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$ y $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$ pero como $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, la opción $x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$ se descarta.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 18. Utilizando la definición de logaritmos, encuentre el valor de x en los casos siguientes:

a) $\log_x 10 = 5$	b) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{2}$	c) $\log_x \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$	d) $\log_x 10 = -\frac{1}{2}$
e) $\log_x 0{,}5 = -2$	f) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$	g) $\log_x 0{,}001 = 0{,}1$	h) $\log_x 0{,}2 = 2$

Ejemplo 5

Determinar x en los siguientes casos:

a) $\log_5 x = 4$ b) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{8}$ c) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{4}$ d) $\log_{\sqrt{2}} x = -3$

Solución

a) $\log_5 x = 4 \;\Rightarrow\; x = 5^4 \Rightarrow \boldsymbol{x = 625}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/8} \Rightarrow x = \sqrt[8]{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; x = \sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = \sqrt{\frac{1}{2}}}$

c) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x = \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; x = 3^{\frac{1}{8}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = \sqrt[8]{3}}$

d) $\log_{\sqrt{2}} x = -3 \;\Rightarrow\; x = \left(\sqrt{2}\right)^{-3} \;\Rightarrow\; x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} \;\Rightarrow\; x = 2^{-\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 19.

Utilizando la definición de logaritmos, encuentre el valor de x en los casos siguientes:

a) $\log_5 x = 5$ b) $\log_{10} x = 0$ c) $\log_5 x = -3$ d) $\log_2(x^2 - 2) = -1$

e) $\log_{\sqrt{5}} x = \frac{2}{3}$ f) $\log_{\sqrt{3}}(2x) = -4$ g) $\log_{0,1} \frac{x}{4} = -1$ h) $\log_2(x^2 + 2) = -1$

La idea del siguiente ejemplo es usar sólo los conceptos de logaritmos, pues aún no hemos visto a la *función logarítmica*.

Es un **desafío** algebraico, para los que están acostumbrados a usar propiedades de funciones inversas, resolver los problemas que se presentan ahora y que **no** envuelven funciones en este momento.

Después definiremos la función logarítmica; pero por ahora, sólo trabajamos el concepto de logaritmo como **operación aritmética**.

¿Qué significa esto de ser operación aritmética?

Dados dos números reales, puedo **sumarlos**, **restarlos**, **multiplicarlos**, **dividirlos**, calcular la **potencia** de uno respecto del otro (multiplicación abreviada), o **logaritmar** uno en la base del otro (con las restricciones apropiadas de la base y del logaritmando)

Hay que dejar claro también que, suma, resta, multiplicación, división, potenciación y logaritmación son también funciones que, en conjuntos numéricos específicos y con las operaciones elegidas, cumpliendo algunas propiedades, constituyen Estructuras Algebraicas. Estos temas serán tratados en Introducción al Álgebra Lineal, Álgebra y Estructuras Algebraicas, entre otras disciplinas dictadas en esta Facultad.

La potenciación y la logaritmación se verán en su forma funcional en los diferentes Cálculos, dictados también en esta Facultad. En el Ingreso, veremos estas dos operaciones aritméticas también como funciones. Ya vimos la función exponencial, después de recordar las propiedades de la potenciación como operación aritmética. Haremos lo mismo con la función logarítmica, recordaremos las propiedades de los logaritmos, para luego verlos como función.

Ejemplo 6

Siendo $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, determinar x, mediante la definición de logaritmo.

a) $x = a^{\log_a b}$

b) $x = a^{2 \cdot \log_a b}$

c) $x = a^{1+\log_a b}$

d) $x = a^{\log_a b \cdot \log_b c}$

Solución

a) $\boldsymbol{x = a^{\log_a b}}$ **(1)**

Llamaremos "y" al exponente de la base a : $y = \log_a b$ **(2)**.

De esta forma, podemos expresar **(1)**, como $x = a^{\log_a b} \underbrace{=}_{(2)} a^y$ **(3)**

Apliquemos a **(2)**, la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a^y = b}$

Indiquemos como **(4)** a la igualdad anterior $\boldsymbol{a^y = b}$ **(4)**

Por **(3)** y **(4)** tenemos: $x \underbrace{=}_{(3)} a^y$ y $a^y \underbrace{=}_{(4)} b$ Por la propiedad transitiva de la igualdad en **(3)** y **(4)**, resulta que $x = b$, pues: $\boldsymbol{x \underbrace{=}_{(3)} a^y \wedge a^y \underbrace{=}_{(4)} b \Rightarrow x = b}$ (propiedad transitiva de la igualdad)

Concluimos que:

$$\boxed{\boldsymbol{x = b}}$$

b) $\boldsymbol{x = a^{2 \cdot \log_a b}}$ **(1)**

Llamaremos "y" a <u>uno</u> de los factores del exponente de la base a : $y = \log_a b$ **(2)**.

De esta forma, podemos expresar **(1)**, como $x = a^{2 \cdot \log_a b} \underbrace{=}_{(2)} a^{2 \cdot y} \underbrace{=}_{(*)} (a^y)^2$ **(3)**

(∗) Propiedad Potencia de una potencia.

Apliquemos a **(2)**, la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a^y = b}$

Indiquemos como **(4)** a la igualdad anterior $\boldsymbol{a^y = b}$ **(4)**

Por **(3)** y **(4)** tenemos: $x \underbrace{=}_{(3)} (a^y)^2$ y $(a^y)^2 \underbrace{=}_{(4)} b^2$ Por la propiedad transitiva de la igualdad en **(3)** y **(4)**, resulta que $x = b^2$, pues: $\boldsymbol{x \underbrace{=}_{(3)} (a^y)^2 \wedge (a^y)^2 \underbrace{=}_{(4)} b \Rightarrow x = b^2}$ (propiedad transitiva de la igualdad)

Concluimos que:

$$\boxed{\boldsymbol{x = b^2}}$$

c) $\boldsymbol{x = a^{1+\log_a b}}$ **(1)**

Llamaremos "y" a <u>uno</u> de los términos del exponente de la base a : $y = \log_a b$ **(2).**
De esta forma, podemos expresar **(1),** como $x = a^{1+\log_a b} \underbrace{=}_{(*)} a^1 \cdot a^{\log_a b} \underbrace{=}_{(2)} a^1 \cdot a^y$ **(3)**

(∗) Propiedad del producto de potencias de la misma base.

Apliquemos a **(2)**, la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a^y = b}$

Indiquemos como **(4)** a la igualdad anterior $\boldsymbol{a^y = b}$ **(4)**
Por **(3)** y **(4)** tenemos: $x \underbrace{=}_{(3)} a^1 a^y$ y $a^1 a^y \underbrace{=}_{(4)} a^1 b = ab$.
Por la propiedad transitiva de la igualdad en **(3)** y **(4)**, resulta que $x = a \cdot b$, pues: $x \underbrace{=}_{(3)} a^1 a^y$

y $a^1 a^y \underbrace{=}_{(4)} a^1 b = ab \Rightarrow \boldsymbol{x = a \cdot b}$ (propiedad transitiva de la igualdad)

Concluimos que:

$$\boxed{\boldsymbol{x = a \cdot b}}$$

d) $\boldsymbol{x = a^{\log_a b \cdot \log_b c}}$ **(1)**

Llamaremos con y y z a los exponentes de a:
$y = \log_a b$ **(2)**
$z = \log_b c$ **(3)**

De esta forma, podemos expresar **(1),** como $x = a^{\log_a b \cdot \log_b c} \underbrace{=}_{(2)y\,(3)} a^{y \cdot z}$ **(4)**

Apliquemos a **(2)** y a **(3)** la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a^y = b}$ **(5)** y

también $\log_b c \underbrace{=}_{(3)} z \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{b^z = c}$ **(6)**

Por **(4)**; **(5)** y **(6)** $x \underbrace{=}_{(4)} a^{y \cdot z} \underset{(*)}{\Rightarrow} x = (a^y)^z \underset{(5)}{\Rightarrow} x = b^z \underset{(6)}{\Rightarrow} \boldsymbol{x = c}$

$$\boxed{\boldsymbol{x = c}}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Hay que recordar que: La idea es resolver estos ejercicios sólo con los conceptos de logaritmos, pues aún no hemos visto a la función logaritmo y su inversa.

Ejercicio 20.

Determine x:

a) $x = 5^{\log_5 2}$ b) $x = 3^{\log_3 10}$ c) $x = 10^{3 \cdot \log_{10} 10}$ d) $x = 2^{5+\log_2 5}$

Ejercicio 21.

Siendo $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, determinar N

a) $N=a^{5+\log_a 5}$ b) $N=a^{3-\log_a b}$ c) $N=b^{\log_b 3\cdot\log_3 b}$ d) $N=a^{\log_a c}+b^{\log_b c}$

3. Propiedades y Leyes de los Logaritmos.

Usando la definición de logaritmos podemos resumir las siguientes propiedades:

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1=0$	Se debe elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a=1$	Se debe elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x=x$	Se debe elevar a a la potencia x para obtener a^x
4. $a^{\log_a x}=x$	$\log_a x$ es la potencia a la cual se debe elevar a para obtener x.

Veremos ahora otras propiedades de los logaritmos en la misma base.
Puesto que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes dan lugar a las **leyes de los logaritmos.**

i. Logaritmo de un producto

Sea a un número positivo, con $a\neq 1$. Sean b y c números reales cualesquiera con $b>0$ y $c>0$. Se verifica la siguiente igualdad.

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a(b)+\log_a(c)$$

Esto es:

El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.

Demostraremos esta afirmación.
Siendo $a,b,c\in\mathbb{R}^*_+$, con $a\neq 1$, el problema consiste en encontrar el $\log_a(b\cdot c)$, conociendo los valores de $\log_a(b)$ y $\log_a(c)$

Sea $x=\log_a b$; $y=\log_a c$
Por la definición de logaritmos

$$x=\log_a b\Rightarrow \boldsymbol{b=a^x}\qquad (1)$$
$$y=\log_a c\Rightarrow \boldsymbol{c=a^y}\qquad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro (1) y (2)

$$\boldsymbol{b=a^x}\qquad (1)$$
$$\boldsymbol{c=a^y}\qquad (2)$$

Mult. Miemb. a Miemb $\boldsymbol{b\cdot c=a^x\cdot a^y}$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{b\cdot c=a^{x+y}}$$

logaritmo

(3) $\Rightarrow \boldsymbol{b \cdot c = a^{x+y}}$

Logaritmando   Base del logaritmo

Aplicando la definición de logaritmo, (3) puede ser escrita $\log_a(b \cdot c) = x + y$. Recordemos que $x = \log_a b$ y $y = \log_a c$.
Resumiendo: $\boldsymbol{\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$

Ejemplo 1

Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto en los siguientes casos. (Esto se conoce como **expansión** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_3\left(0{,}2 \cdot \frac{1}{3}\right)$ b) $\log_3(5 \cdot 2)$ c) $\log_5(a \cdot b \cdot c)$

Solución

a) $\log_3\left(0{,}2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_3(0{,}2) + \log_3\left(\frac{1}{3}\right)$
b) $\log_3(5 \cdot 2) = \log_3(5) + \log_3(2)$
c) $\log_5(a \cdot b \cdot c) = \log_5(a) + \log_5(b) + \log_5(c)$

Ejemplo 2

Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto en los siguientes casos. (Esto se conoce como **combinación** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_3 2 + \log_3 7$ b) $\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 10$ c) $\log_5 2 + \log_5\left(\frac{1}{2}\right)$

Solución

a) $\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3(2 \cdot 7) = \log_3(14)$
b) $\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 10 = \log_2(3 \cdot 5 \cdot 10) = \log_2(150)$
c) $\log_5 2 + \log_5\left(\frac{1}{2}\right) = \log_5\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_5 1 = 0$

ii. Logaritmo de un cociente

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean b y c números reales cualesquiera con $b > 0$ y $c > 0$. Se verifica la siguiente igualdad.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Esto es:

El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.

Demostremos esta afirmación, determinaremos cómo evaluar $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$, conociendo los valores de $\log_a(b)$ y de $\log_a(c)$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, con $a \neq 1$
Sea $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$
Por la definición de logaritmos:

$$x = \log_a b \Rightarrow b = a^x \qquad (1)$$
$$y = \log_a c \Rightarrow c = a^y \qquad (2)$$

Dividiendo (1) por (2):

$$\frac{b}{c}=\frac{a^x}{a^y} \;\Rightarrow\; \frac{b}{c}=a^{x-y} \quad (3)$$

Si aplicamos nuevamente la definición de logaritmos a esta última expresión (3) tenemos que

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=x-y \xrightarrow[(1)y\,(2)]{} \boldsymbol{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c}$$

Ejemplo 1

Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente en los siguientes casos. (Esto se conoce como **expansión** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_8\left(\frac{5}{2}\right)$ b) $\log_{10}(0{,}2)$

Solución

a) $\log_8\left(\frac{5}{2}\right)=\log_8 5-\log_8 2$

b) $\log\,(0{,}2)=\log\left(\frac{2}{10}\right)=\log 2-\log 10=\log 2-1$

Ejemplo 2

Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente en los siguientes casos. (Esto se conoce como **combinación** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_3 2-\log_3 7$ b) $\log_2 10-\log_2 5$ c) $\log_3(2{,}5)-\log_3(10)$

Solución

a) $\log_3 2-\log_3 7=\log_3\left(\frac{2}{7}\right)$

b) $\log_2 10-\log_2 5=\log_2\left(\frac{10}{5}\right)=\log_2 2=1$

c) $\log_3(2{,}5)-\log_3(10)=\log_3\left(\frac{2{,}5}{10}\right)=\log_3(0{,}25)$

Ejemplo 3

Aplicar la propiedad del logaritmo, vistas hasta ahora, en los siguientes casos:

a) $\log_d\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)$ b) $\log_3\left(\frac{3a}{b}\right)$

Solución

a) $\log_d\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)=\log_d(a\cdot b)-\log_d(c)=\log_d(a)+\log_d(b)-\log_d(c)$

b) $\log_3\left(\frac{3a}{b}\right)=\log_3(3a)-\log_3 b=\log_3(3)+\log_3 a-\log_3 b\;=1+\log_3 a-\log_3 b$

iii. Logaritmo de una potencia

Calculemos ahora el valor de $\log_a(b^m)$, conociendo los valores de $\log_a(b)$ el valor de m, donde $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, con $a\neq 1$

Solución

Sea $x=\log_a b$ e $y=\log_a c$

Por la definición de logaritmos

$$x=\log_a b^m \Rightarrow b^m=a^x \qquad (1)$$
$$y=\log_a b \Rightarrow b=a^y \qquad (2)$$

Elevando (2) a la m, obtenemos:

$$b^m = (a^y)^m \Rightarrow b^m = a^{ym} \qquad (3)$$

Comparando (1) y (3) tenemos
$a^x = a^{ym}$, resolviendo esta ecuación exponencial de la misma base, tenemos: $x = m \cdot y$
Sustituyen en esta última igualdad (1) y (2):

$$x = m \cdot y \underset{(1)}{\Rightarrow} \log_a b^m = m \cdot y \underset{(2)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\log_a b^m = m \cdot \log_a b}$$

Podemos concluir entonces que:

> El logaritmo de la potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Ejemplo 1

Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia en los siguientes casos. (Esto se conoce como **expansión** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_{15}(3^2)$ b) $\log_3(10^{-4})$ c) $\log \sqrt[3]{2}$

Solución

a) $\log_{15}(3^2) = 3 \cdot \log_{15}(3)$
b) $\log_3(10^{-4}) = (-4) \cdot \log_3(10)$
c) $\log \sqrt[3]{2} = \log\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \log 2$

Ejemplo2

Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia en los siguientes casos. (Esto se conoce como **combinación** de expresiones logarítmicas)

a) $5 \cdot \log_6 2$ b) $(-10) \cdot \log_2 5$

Solución

a) $5 \cdot \log_6 2 = \log_6 2^5$
b) $(-10) \cdot \log_2 5 = \log_2 5^{-10}$

Podemos resumir estas Leyes en el siguiente cuadro:

Leyes de los Logaritmos	
Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$ y $B > 0$	
1. $\log_a(A \cdot B) = \log_a(A) + \log_a(B)$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.

3. $\log_a(A^C) = C \cdot \log_a(A)$	El logaritmo de la potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 22.

Use la Ley de Logaritmos para expandir las expresiones

a. $\log_3(5y)$ *b.* $\log_2\big(x(x-1)\big)$ *c.* $\log_6 \sqrt[4]{17}$

d. $\log_5 \sqrt[3]{x^2 + 1}$ *e.* $\ln \sqrt{ab}$ *f.* $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$

g. $\log_2\left(\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ *h.* $\log \sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3+7)^2}}$ *i.* $\log \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

Ejercicio 23.

Use las Leyes de Logaritmos para combinar cada expresión

a. $\log_2 A + \log_2 B + 2\log_2 C$

b. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

c. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^{2+5})$

d. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

e. $\frac{1}{3}\log(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

f. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

Ejercicio 24.

Resuelva las siguientes operaciones

a. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$ *b.* $\log(\log 10^{10000}) =$

c. $\log\frac{1}{\sqrt{1000}} =$ *d.* $ln\left(ln\, e^{e^{200}}\right) =$

4. Cambio de base

En algunos casos, es útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que se da $\log_a x$ y se quiere hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x \qquad (1)$$

Podemos escribir esto en forma exponencial y se toma el logaritmo, con base a, de cada lado.

$b^y = x$		Forma exponencial
$\log_a b^y = \log_a x$		Tomando log_a de cada lado
$y \cdot \log_a b = \log_a x$		Ley del logaritmo de una potencia
$y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	**(2)**	Dividiendo por $\log_a b$

$$\mathrm{y} \underbrace{=}_{(1)} \log_b x \underbrace{=}_{(2)} \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Obtenemos la siguiente fórmula para el cambio de base

Fórmula de cambio de base
$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Ejemplo 1

Pasar a la base 5:

a) $\log_3 2$ b) $\log_7 \sqrt{2}$ c) $\log_2 5$ d) $\log_3\left(\frac{1}{5}\right)$

Solución

a) $\log_3 2 = \frac{\log_5 2}{\log_5 3}$

b) $\log_7 \sqrt{2} = \frac{\log_5 \sqrt{2}}{\log_5 7} = \frac{\log_5 2^{\frac{1}{2}}}{\log_5 7} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\log_5 2}{\log_5 7} = \frac{\log_5 2}{2\cdot\log_5 7}$

c) $\log_2 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = \frac{1}{\log_5 2}$

d) $\log_3\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\log_5\left(\frac{1}{5}\right)}{\log_5 3} = \frac{\log_5\left(\frac{1}{5}\right)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 1-\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{-\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{-1}{\log_5 3}$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de N sabiendo que $\log_2 N = \log_5 3$.

Solución

$\log_2 N = \frac{\log_5 N}{\log_5 2} = \log_5 3 \quad$ **(1)**

$$\underset{de\ (1)}{\Longrightarrow} \frac{\log_5 N}{\log_5 2} = \log_5 3 \underset{(2)}{\Rightarrow} \log_5 N = \log_5 2 \cdot \log_5 3 \underset{(3)}{\Rightarrow} \log_5 N = \log_5 3^{\log_5 2} \underset{(4)}{\Rightarrow} \boldsymbol{N = 3^{\log_5 2}}$$

(1) Expresamos el primer miembro, donde está la incógnita N, en base 5, la base en la cual está el dato

(2) Multiplicamos ambos miembros por $\log_5 2$

(3) Ley del logaritmo de una potencia

(4) Despejamos N usando la definición de logaritmos $5^{\log_5 N} = 5^{\log_5 3^{\log_5 2}}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 25.

Use la regla para cambio de base y calculadora para resolver (redondear a seis lugares decimales)

a. $\log_2 5$=

b. $\log_5 2$=

c. $\log_3 16$=

d. $\log_6 92$=

e. $\log_7 2.61$=

f. $\log_6 532$=

g. $\log_4 125$=

h. $\log_{12} 2.5$=

Ejercicio 26.

Se sabe que $\log_2 N = \log_5 3$ transforme el segundo miembro en un logaritmo en base 2 y calcule N y coteje con el ejemplo 2. Saque conclusiones, si las hay.

Ejercicio 27.

Transforme en logaritmos de base 10 y aproxime al segundo decimal. Haga lo mismo para la base e y aproxime. Saque conclusiones, si las hay.

a) $\log_2 3$ b) $\log_{0,2} 5$ c) $\log_4 3$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 12$ e) $\log_3 10$ f) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$

Ejercicio 28.

Transforme para la base solicitada ($a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ y diferentes de 1)

a) $\log_c b$ para la base b.
b) $\log_b a$ para la base b^2
c) $\log_b a$ para la base $\frac{1}{a}$

5. La Función Logarítmica.

Sea a un número real, positivo y diferente de 1 (o sea $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Llamamos función logarítmica de base a a la función:

$$g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ definida por } g(x) = \log_a x$$

Observe que el dominio de la función es $\mathbb{R}_+^*$, o sea, solamente valores positivos podrán ser atribuidos a la variable x.
Vamos a analizar dos ejemplos. En el primero la base es mayor que 1 y en el segundo, la base está entre 0 y 1.

Ejemplo 1

Consideremos la función definida por

$$y = \log_3 x \qquad \text{o} \qquad f(x) = \log_3 x$$

Atribuiremos valores arbitrarios a x y calculando $f(x)$, vamos a construir una tabla de valores para encontrar los puntos que pertenecen al gráfico de la función $y = \log_3 x$

x	y	Punto (x, y)
$\frac{1}{9}$	-2	$\left(\frac{1}{9}, -2\right)$
$\frac{1}{3}$	-1	$\left(\frac{1}{3}, -1\right)$
1	0	$(1\,, 0)$
3	1	$(3\,, 1)$
9	2	$(9\,, 2)$

$$\log_3 \frac{1}{9} = y \Rightarrow 3^y = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow y = -2$$

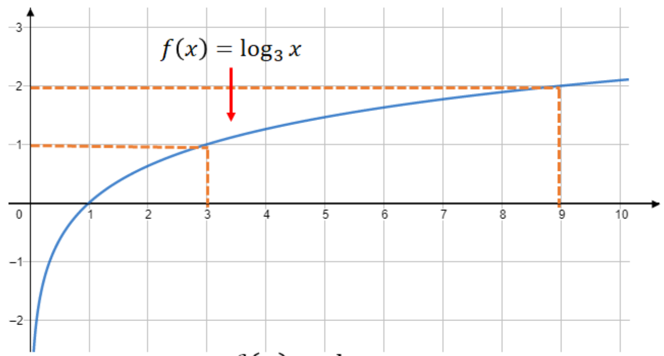
$$\log_3 \frac{1}{3} = y \Rightarrow 3^y = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\log_3 1 = y \Rightarrow 3^y = 1 = 3^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_3 3 = y \Rightarrow 3^y = 3 = 3^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_3 9 = y \Rightarrow 3^y = 9 = 3^2 \Rightarrow y = 2$$

Gráfico:



$y = f(x) = \log_3 x$

Observe que, sólo por conveniencia, atribuimos a x solamente valores que son potencias de exponente entero de la base, pues de ese modo obtenemos valores enteros para el logaritmo.

Observe también que, cuando el valor de x (positivo) "*se aproxima a cero*", más y más los puntos del gráfico "*se aproximan del eje y*", sin nunca tocarlo. De este modo el *eje y* es una asíntota a la curva.

Ejemplo 2

Veamos la función definida por $y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$

Procedamos de manera análogo a la del ejemplo 1, una tabla de valores y puntos perteneciente al gráfico de la función $y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$

x	y	Punto (x, y)
$\frac{1}{9}$	2	$\left(\frac{1}{9}, 2\right)$
$\frac{1}{3}$	1	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
1	0	$(1\,, 0)$
3	-1	$(3\,, -1)$
9	-2	$(9\,, -2)$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = y \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \;\Rightarrow\; y = 2$$

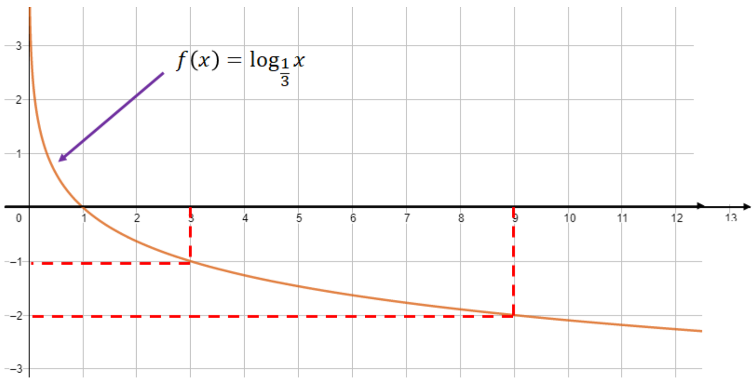
$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = y \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \;\Rightarrow\; y = 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 1 = y \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \;\Rightarrow\; y = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 = y \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \;\Rightarrow\; y = -1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = y \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \;\Rightarrow\; y = -2$$

Gráfico:



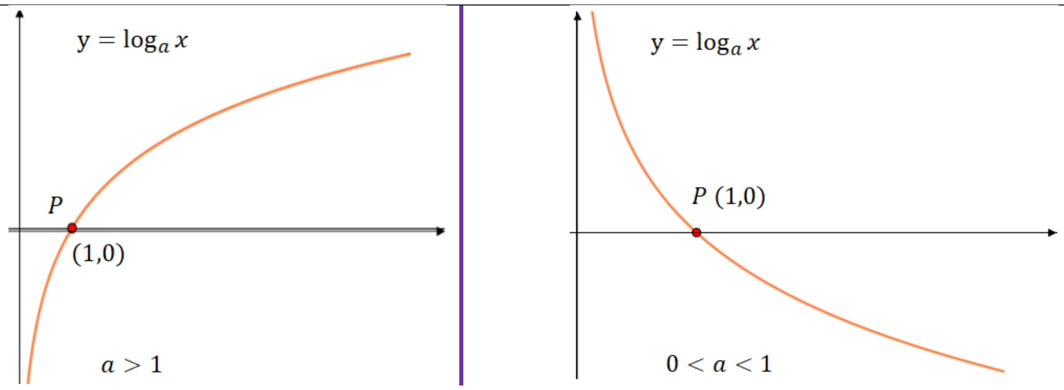
$$y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

Los ejemplos dados nos llevan a clasificar una función definida por $y = \log_a x$ como:

- Creciente cuando $a > 1$
- Decreciente cuando $0 < x < 1$

Caracterización de una función logarítmica del estilo $f(x) = \log_a x$

1- Gráfico de la función:



2- El Dominio de la función es $\mathbb{R}_+^*$, o sea, solamente los números positivos poseen logaritmo.
3- El Conjunto Imagen de la función es $\mathbb{R}$, o sea que, cualquier número real es el logaritmo de algún número real positivo, en alguna base.
4- El gráfico de la función está a la derecha del $eje\ y$.
5- Si $x = 1 \Rightarrow y = \log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$. O sea que el punto $P(1,0)$ pertenece al gráfico de la función, es decir, en cualquier base, el logaritmo de 1 es 0.
6- Si $x = a$ es la base, tenemos que $y = \log_a a = 1$, pues $a^1 = a$. O sea que el logaritmo de la base es 1.
7- La función es inyectiva, pues si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$.
8- La función es sobreyectiva pues, para $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^* \,|\, y = \log_a x$.
9- La función es biyectiva, o uno a uno, pues es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.
10- En el caso de que $a > 1$, la función es creciente, pues si $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.
11- En el caso de que $0 < x < 1$, la función es decreciente pues si $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.
12- El $eje\ y$ es una asíntota vertical de la función.
13- Si no se escribe la base, se sobreentiende que la base es 10, o sea, $\log_{10} x = \log x$.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 29.

Construya el gráfico de las funciones siguientes:

a) $y = \log_2 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \log_{2,5} x$

Ejercicio 30.

Calcule el valor de x

a) $\log_2 1 = x$ b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = x$ c) $\log_{10}(\log_2 2) = x$

Ejercicio 31.

Verifique cuáles funciones son crecientes y cuáles son decrecientes

a) $y = \log_5 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \log_{0,6} x$ d) $f(x) = \log_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} x$

Ejercicio 32.

Para qué valores de $\boldsymbol{a}$, la función:

a) ¿ $y = \log_{(a-2)} x$ es creciente? b) ¿ $y = \log_{(a+3)} x$ es decreciente?

Ejercicio 33.

Verifique para qué valores de $\boldsymbol{a}$, la función $y = \log_{(a^2-3)} x$:

a) es creciente b) es decreciente

Ejercicio 34.

Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas modelos. (Gráficas de función logarítmica y exponencial).

a) $f(x) = \log_2(x - 4)$

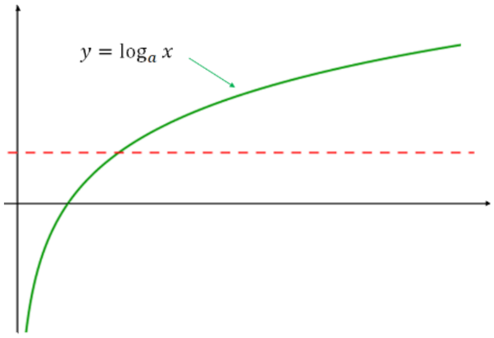
b) $g(x) = 2 + \log_3 x$

c) $h(x) = 1 - \log_{10} x$

5. La Función Logarítmica como Función Inversa.

Cuando estudiamos la función exponencial, vimos que era biyectiva. Por esta razón. Admitía inversa.

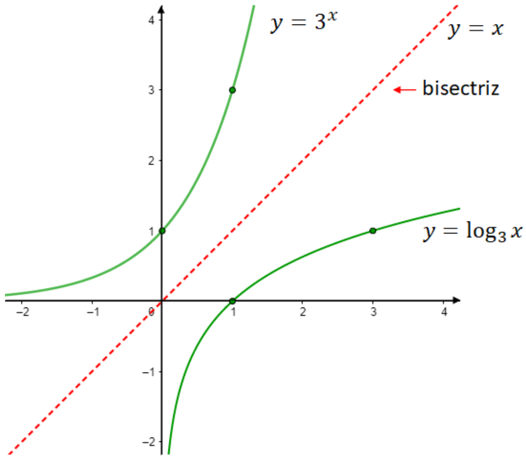
Si observamos la gráfica de la función logarítmica, vemos que ésta también es biyectiva.



Por otro lado, el logaritmo está definido en función de una potencia, la cual podemos asociarla a la función exponencial.

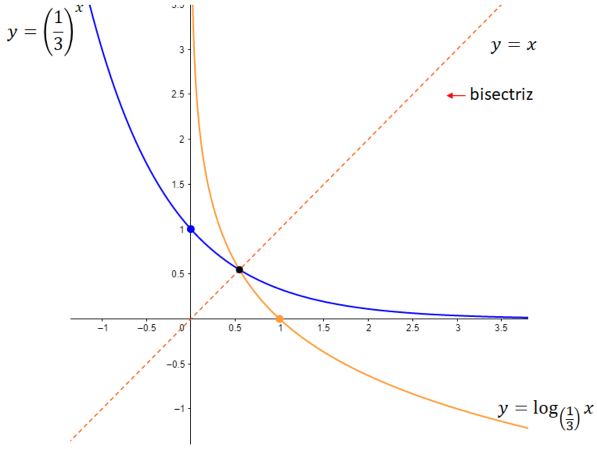
Sería natural, suponer que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica y viceversa.

Hagamos en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $y = \log_3 x$ y la función $y = 3^x$.



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante, $y = x$. Este hecho es característico de las funciones inversas, como ya fue visto.

Del mismo modo, analicemos las funciones $y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ construyéndolas en el mismo sistema de ejes cartesianos.



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante, $y = x$.

Recordemos que si f y g son funciones inversas, se cumple que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = id(x) = x$

Verifiquemos que esto se cumple en los ejemplos dados.

(a) $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 3^x$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3^x) = \log_3(3^x) \underbrace{=}_{(*)} x \cdot \log_3 3 \underbrace{=}_{(**)} x \cdot 1 = x$$

$(*)$ Ley del logaritmo de una potencia.

$(**)$ El logaritmo de la base es 1

(b) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\log_3 x\big) = 3^{\log_3 x} \underbrace{=}_{(***)} x$

$(***)$ Definición de logaritmo. Recordemos que el $\log_3 x$, es el **exponente** al que hay que elevar la base 3, para obtener x.

Por **(a)** y **(b)** las funciones $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 3^x$ son inversas entre si.

6. Dominio de la función logarítmica

Recordemos que en la función logarítmica el logaritmando debe ser real y positivo, la base debe ser real, positiva y diferente de 1. Analicemos algunos ejemplos de determinación de dominio:

Ejemplo 1

Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_5(3x + 10)$ b) $f(x) = \log_4(5 - 12x)$

Solución

a) $y = \log_5(3x + 10)$

Debemos tener $\boxed{3x + 10 > 0}$

Entonces $3x > -10 \;\Rightarrow\; x > -\frac{10}{3}$.

Por lo tanto, el dominio es: $\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} |\; x > -\frac{10}{3}\right\}}$

b) $f(x) = \log_4(5 - 12x)$

Debemos tener $\boxed{5 - 12x > 0}$

Entonces $5 > 12x \;\Rightarrow\; 12x < 5 \;\Rightarrow x < \frac{5}{12}$.

Por lo tanto, el dominio es: $\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} |\; x < \frac{5}{12}\right\}}$

Ejemplo 2

Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_{10}(x^2 + 8x + 15)$ b) $f(x) = \log_4(x^2 + 3x + 5)$

Solución

a) $y = \log_{10}(x^2 + 8x + 15)$

Debemos tener $\boxed{x^2 + 8x + 15 > 0}$

$x^2 + 8x + 15 = 0$ tiene raíces $x_1 = -5$ y $x_2 = -3$

Por lo tanto $x^2 + 8x + 15 = (x + 5) \cdot (x + 3)$.

Analizamos el signo de la función cuadrática $y = x^2 + 8x + 15$ en los intervalos $(-\infty, -5)$, en $(-5, -3)$ y en $(-3, \infty)$, determinados por sus raíces.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, \infty)$
$(x+5)$	$-$	$+$	$+$
$(x+3)$	$-$	$-$	$+$
$(x+5)\cdot(x+3)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto $x^2 + 8x + 15 > 0$ en $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$

Por lo tanto, el dominio es: $\boldsymbol{D = \{x \in \mathbb{R} |\; x < -5 \text{ o } x > -3\} = (-\infty, -5) \cup (-3, \infty)}$

b) $f(x) = \log_4(x^2 + 3x + 5)$

Debemos tener $\boxed{x^2 + 3x + 5 > 0}$
$x^2 + 3x + 5 = 0$ no tiene raíces reales pues $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$
El signo de la función cuadrática $y = x^2 + 8x + 15$ está determinado por el coeficiente principal. Como $a = 1 > 0$, $y = x^2 + 8x + 15$ será siempre positiva para todo x en $\mathbb{R}$
Por lo tanto, el dominio es: $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3

Determinar el dominio de la función $y = \log_{(5x-12)}(5)$

Solución

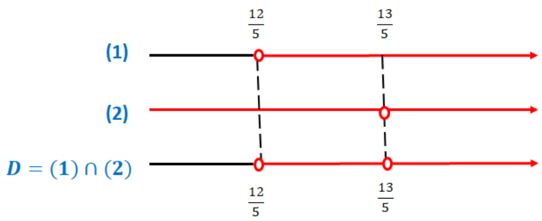
Se debe cumplir simultáneamente:

$$5x - 12 > 0 \quad \textbf{(1)} \quad \text{y} \quad 5x - 12 \neq 1 \ \textbf{(2)}$$

(1)$5x - 12 > 0 \ \Rightarrow \ 5x > 12 \ \Rightarrow x > \frac{12}{5}$

(2)$5x - 12 \neq 1 \ \Rightarrow 5x \neq 13 \ \Rightarrow x \neq \frac{13}{5}$

Resumiendo, tenemos:



El dominio es la intersección de **(1)** y **(2)**, o sea $\boldsymbol{D} = (1) \cap (2)$. Entonces,

$$\boldsymbol{D} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \ \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}} < \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}} \ \boldsymbol{o} \ \boldsymbol{x} > \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}\right\}$$

También podemos escribir el dominio de la siguiente manera

$$\boldsymbol{D} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \ \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}} \ \ \boldsymbol{y} \ \ \boldsymbol{x} \neq \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}\right\}$$

O sino:

$$\boldsymbol{D} = \left(\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}; \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}\right) \cup \left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}; \infty\right)$$

Ejemplo 4

Determinar el dominio de la función $y = \log_{(x-3)}(15 - 2x)$

Solución

Se debe cumplir simultáneamente:

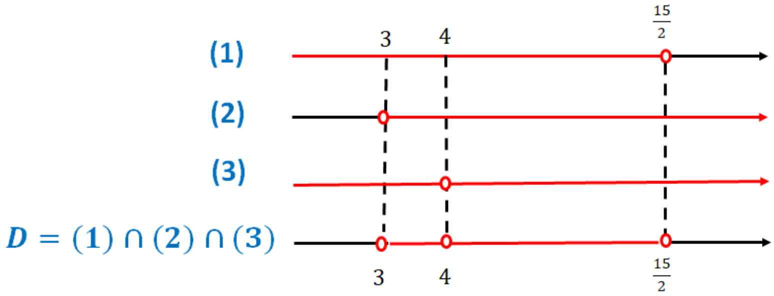
$$15 - 2x > 0 \quad \textbf{(1)}; \quad x - 3 > 0 \quad \textbf{(2)} \quad \text{y} \quad \textbf{(3)}$$

(1) $15 - 2x > 0 \ \Rightarrow \ 15 > 2x \ \Rightarrow \ 2x < 15 \ \Rightarrow x < \frac{15}{2}$

(2) $x - 3 > 0 \ \Rightarrow x > 3$

(3) $x - 3 \neq 1 \ \Rightarrow x \neq 4$

Resumiendo, tenemos:



El dominio es la intersección de (1) ; (2) y (3). Por lo tanto:

$$\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle|\ 3 < x < 4 \ \ o \ \ 4 < x < \frac{15}{2}\right\}}$$

Ejemplo 5

Determinar el dominio de la función $y = \log_{(x^2-9)}(-x^2 - 3x + 4)$

Solución

Se debe cumplir simultáneamente:

$$-x^2 - 3x + 4 > 0 \quad \textbf{(1)}\ ; \quad x^2 - 9 > 0 \quad \textbf{(2)} \quad \text{y} \ \ x^2 - 9 \neq 1 \quad \textbf{(3)}$$

(1) La condición $-x^2 - 3x + 4 > 0$ es equivalente a $x^2 + 3x - 4 < 0$

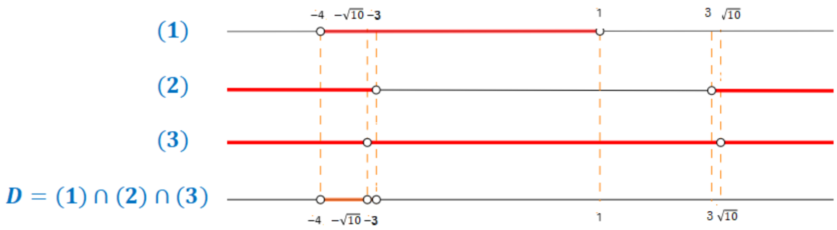
Estudiemos el signo de la función $f(x) = x^2 + 3x - 4$
Las raíces de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ son $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$
El signo de f varía según la siguiente gráfica:

(2) $x^2 - 9 > 0$

Estudiemos el signo de la función$g(x) = x^2 - 9$
Las raíces de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$
El signo de g varía según la siguiente gráfica:

(3) $x^2 - 9 \neq 1 \ \Rightarrow \ x^2 \neq 10 \ \Rightarrow \ x = \pm\sqrt{10}$

Por lo tanto:



El dominio es la intersección de (1) ; (2) y (3). Por lo tanto:

$$\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle|\ -4 < x < -\sqrt{10} \ \ o \ \ -\sqrt{10} < x < -3\right\}}$$

Podemos escribirlo también

$$\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -4 < x < -3 \;\; y \;\; x \neq -\sqrt{10}\right\}}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 35.

Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_{12}(5x + 1)$

b) $f(x) = \log_4\left(3 - \frac{x}{4}\right)$

c) $y = \log_2(x^2 - 15x)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 9)$

e) $y = \log_{(x-4)}(15)$

f) $f(x) = \log_{(-x)}(12)$

g) $y = \log_{(x-5)}(3x - 12)$

h) $y = \log_{(1-x)}(5 + 12x)$

i) $y = \log_{(x^2-3)}(x^2 - 5x + 4)$

7. Ecuaciones logarítmicas.

Son ecuaciones que presentan logaritmos con la incógnita figurando en el logaritmo (resultado), en el logaritmando o en la base.

Son ejemplos de ecuaciones logarítmicas:

$a)\ \log_2(3x + 1) = 3$

$b)\ \log_x 5 = 12$

$c)\ \log_5 12 = x$

$d)\ \log_2(x - 1) + \log_7 2x = 1$

$e)\ \log x + \log(x - 1) = 1$

Algunos de estos ejemplos pueden ser resueltos sólo con la definición de logaritmo. Ya, el ejemplo (d) necesita de más elaboración.

Observación: Cuando resolvemos una ecuación logarítmica, debemos tener en cuenta las restricciones a que deben estar sujetos los logaritmos, las bases y, consecuentemente la incógnita:

¿Cómo determinamos estas restricciones?

Debemos asegurarnos de que:

1) El logaritmando sea positivo.

$\log_2(3x + 1) = 3 \quad \textit{restricción}\ 3x + 1 > 0$

2) La base sea positiva y distinta de 1.

$\log_a(30) = 2 \quad \textit{restricción}\ a > 0\ y\ a \neq 1$

A las restricciones se les suele llamar también “condiciones de existencia” o “dominio de definición”, siendo estas designaciones, todas, equivalentes.

El “Conjunto Universo”, ($\boldsymbol{\mathcal{U}}$) del cual obtenemos nuestras soluciones, es el conjunto de los números reales que cumplen con las dos restricciones mencionadas anteriormente.

El “Conjunto Solución” ($\boldsymbol{S}$), es un subconjunto de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ en el cual sus elementos verifican la igualdad planteada. ($\boldsymbol{S \subseteq \mathcal{U}}$)

En el ejemplo dado, $\log_2(3x + 1) = 3$, $\boldsymbol{\mathcal{U} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x > -\frac{1}{3}\right\}}$, mientras que $\boldsymbol{S = \left\{\frac{7}{3}\right\} \subseteq \mathcal{U}}$

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación $\log_4(5x-1)=2$

Solución

$$\log_4(5x-1)=2$$
$$4^2=5x-1 \quad \textit{(por definición de logaritmos)}$$
$$16+1=5x$$
$$\frac{17}{5}=x$$

Como el logaritmando debe ser positivo, debemos **verificar** que $(5x-1)>0$ cuando $x=\frac{17}{5}$:

$5.\frac{17}{5}-1=16>0$.

Por lo tanto, el conjunto solución es: $\boldsymbol{S}=\left\{\frac{17}{5}\right\}$

> *Compruebe su respuesta:*
>
> Para $x=\frac{17}{5}$
>
> $\log_4\left(5\frac{17}{5}-1\right)=\log_4(17-1)=\log_4(16)=2$ ✅

Ejemplo 2

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\log_8(x)=\frac{2}{3}$ b) $\log_4(x-1)=\frac{1}{2}$ c) $\log_2(2-x)=-1$

Solución

a) $\log_8(x)=\frac{2}{3}$
$$8^{\frac{2}{3}}=x \quad \textit{(por definición de logaritmos)}$$
$$\sqrt[3]{8^2}=x$$
$$x=4$$

> *Compruebe su respuesta:*
>
> Para $x=4$
>
> $\log_8(4)=\frac{\log_2 4}{\log_2 8}=\frac{2}{3}$ ✅

Como el logaritmando debe ser positivo, debemos **verificar** que $x>0$, como $4>0$ el conjunto solución es: $\boldsymbol{S}=\{4\}$

b) $\log_4(x-1)=\frac{1}{2}$
$$4^{\frac{1}{2}}=x-1 \quad \textit{(por definición de logaritmos)}$$
$$x=2+1$$
$$x=3$$

> *Compruebe su respuesta:*
>
> Para $x=3$
>
> $\log_4(3-1)=\log_4 2=\frac{1}{2}$ ✅

Como el logaritmando debe ser positivo, debemos **verificar** que $x-1>0$, como $3-1=2>0$ el conjunto solución es: $\boldsymbol{S}=\{3\}$

c) $\log_2(2-x)=-1$
$$2^{-1}=2-x \quad \textit{(por definición de logaritmos)}$$

> *Compruebe su respuesta:*
>
> Para $x={}^{3}/_{2}$
>
> $\log_2\left(2-\frac{3}{2}\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$\frac{1}{2} - 2 = -x$
$\frac{3}{2} = x$ ✅

Como el logaritmando debe ser positivo, debemos **verificar** que $2 - x > 0$, como $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$ el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S = \{3/2\}}$

Ejemplo 3

Resuelva la ecuación $\log_2(x^2 - 2x - 16) = 3$

Solución

$\log_2(x^2 - 2x - 16) = 3$
$2^3 = x^2 - 2x - 16$ *(por definición de logaritmos)*
$x^2 - 2x - 24 = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*
$x_1 = -4 \;\; y \; x_2 = 6$

Compruebe su respuesta:

Para $x = -4$
$\log_2((-4)^2 - 2.(-4) - 16) = \log_2 8 = 3$ ✅

Para $x = 6$
$\log_2(6^2 - 2.6 - 16) = \log_2 8 = 3$ ✅

Como el logaritmando debe ser positivo, debemos **verificar** que $x^2 - 2x - 16 > 0$, para cada solución encontrada:

- $(-4)^2 - 2(-4) - 16 = 8 > 0$, entonces (-4) pertenece al conjunto solución.
- $(6)^2 - 2(6) - 16 = 8 > 0$, entonces (6) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S = \{-4, 6\}}$

Ejemplo 4

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\log_{(x-2)} 4 = 2$ b) $\log_x 10 = 3$

Solución

a) $\log_{(x-2)} 4 = 2$
$(x-2)^2 = 4$ *(por definición de logaritmos)*
$x^2 - 4x + 4 = 4$ *(cuadrado de un binomio)*
$x^2 - 4x = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*
$x_1 = 0 \;\; y \; x_2 = 4$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 0$
$\log_{(0-2)}(4) = \log_{-2}(4)$ ❌

Para $x = 4$
$\log_{(4-2)}(4) = \log_2 4 = 2$ ✅

Como la base del logaritmo debe ser positiva y distinta de 1, se descarta la opción de $x = 0$, pero aún debemos **verificar** que $x - 2 > 0$ y $x - 2 \neq 1$ para la solución que queda:

- $4 - 2 = 2 > 0$ y $4 - 2 \neq 1$, entonces (4) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{4}\}$

b) $\log_x 10 = 3$

$x^3 = 10$ *(por definición de logaritmos)*

$x = \sqrt[3]{10}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = \sqrt[3]{10}$

$\log_{\sqrt[3]{10}}(10) = \frac{\log 10}{\log \sqrt[3]{10}} = 3$ ✅

Como la base del logaritmo debe ser positiva y distinta de 1, debemos **verificar** que se cumplen ambas restricciones: $\sqrt[3]{10} > 0$ *y* $\sqrt[3]{10} \neq 1$ entonces el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S} = \{\sqrt[3]{10}\}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación: $\log_{(x-3)}(x - 1) = 2$

Solución

$\log_{(x-3)}(x - 1) = 2$

$(x - 3)^2 = (x - 1)$ *(por definición de logaritmos)*

$x^2 - 6x + 9 = x - 1$ *(cuadrado de un binomio)*

$x^2 - 7x + 10 = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*

$x_1 = 2 \ y \ x_2 = 5$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 2$

$\log_{(2-3)}(2 - 1) = \log_{-1}(1)$ ❌

Para $x = 5$

$\log_{(5-3)}(5 - 1) = \log_2 4 = 2$ ✅

Como la incógnita está en la base debe satisfacer que $x - 3 > 0$ *y* $x - 3 \neq 1$. Además, la incógnita está en el logaritmando entonces también deben verificar que $x - 1 > 0$, en este caso vemos que $x = 2$ no cumple con la primera condición, por lo que se descarta, pero aún debemos **verificar** que se cumplen las tres restricciones para la única solución que nos queda:

- $5 - 2 = 3 > 0$; $3 \neq 1$; $5 - 1 = 4 > 0$ entonces (5) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{5}\}$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación: $\log_2(3x + 1) + \log_2(9 - x) = 2$

Solución

$\log_2(3x + 1) + \log_2(9 - x) = 5$

$\log_2[(3x+1)(9-x)] = 5$ *(logaritmo de un producto)*

$\log_2[27x - 3x^2 + 9 - x] = 5$

$\log_2[-3x^2 + 26x + 9] = 5$ *(suma de términos semejantes)*

$2^5 = -3x^2 + 26x + 9$ *(por definición de logaritmos)*

$-3x^2 + 26x - 23 = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*

$x_1 = 1 \;\; y \; x_2 = \frac{23}{3}$

<u>*Compruebe su respuesta:*</u>

Para $x = 1$

$\log_2(3.1+1) + \log_2(9-1) = 2 + 3 = 5$ ✅

Para $x = \frac{23}{3}$

$\log_2\left(3.\frac{23}{3}+1\right) + \log_2\left(9 - \frac{23}{3}\right) = \log_2\left(24.\frac{4}{3}\right) = 5$ ✅

Como la incógnita está sólo en el logaritmando entonces debemos **<u>verificar</u>** que $3x+1>0$ y $9-x>0$ para cada solución encontrada (ya que son soluciones de una ecuación cuadrática no sabemos si serán solución de la ecuación original que es una ecuación logarítmica):

- $3.1 + 1 = 4 > 0 \;\wedge 9 - 1 = 8 > 0$, entonces (1) pertenece al conjunto solución.
- $3.23/3 + 1 = 24 > 0 \;\wedge 9 - 23/3 = 4/3 > 0$entonces $\left(\frac{23}{3}\right)$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{1}, \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{3}}\right\}$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación: $\log_6(2x+5) - \log_6(32x+20) = -1$

Solución

$\log_6(2x+5) - \log_6(32x+20) = -1$

$\log_6\left[\frac{(2x+5)}{32x+20}\right] = -1$ *(cociente de un logaritmo)*

$6^{-1} = \frac{2x+5}{32x+20}$ *(por definición de logaritmo)*

$\frac{1}{6}(32x+20) = 2x+5$ *(exp. negativo y operaciones)*

$\frac{16}{3}x + \frac{10}{3} = 2x + 5$ *(prop. distributiva)*

$\left(\frac{16}{3} - 2\right)x = 5 - \frac{10}{3}$ *(agrupación de términos semejantes)*

$x = \frac{1}{2}$

<u>*Compruebe su respuesta:*</u>

Para $x = \frac{1}{2}$

$\log_6\left(2\frac{1}{2}+5\right) - \log_6\left(32.\frac{1}{2}+20\right) = \log_6 6 - \log_6 36 = 1 - 2 = -1$ ✅

Como la incógnita está sólo en el logaritmando entonces debemos verificar que $2x+5>0$ y $32x+20>0$ para la solución encontrada:

- $\frac{2.1}{2} + 5 = 6 > 0 \;\wedge 32\left(\frac{1}{2}\right) + 20 = 36 > 0$, entonces $(1/2)$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación: $2 \cdot \log_3(x-1) = 1 + \log_3(7-x)$

Solución

$2\log_3(x-1) = 1 + \log_3(7-x)$

$\log_3(x-1)^2 - \log_3(7-x) = 1$ *(potencia de un logaritmo)*

$\log_3\left[\frac{(x-1)^2}{7-x}\right] = 1$ *(cociente de un logaritmo)*

$3^1 = \frac{(x-1)^2}{7-x}$ *(por definición de logaritmos)*

$21 - 3x = x^2 - 2x + 1$ *(cuadrado de un binomio y operaciones)*

$x^2 + x - 20 = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*

$x_1 = -5 \;\; y \; x_2 = 4$

<u>*Compruebe su respuesta:*</u>

Para $x = -5$

$PM = 2.\log_3(-5-1) = 2.\log_3(-6)$ ✗

Para $x = 4$

$PM = 2.\log_3(4-1) = 2.\log_3 3 = 2$ ✓

$SM = 1 + \log_3(7-4) = 1 + \log_3 3 = 2$

Como la incógnita está en el logaritmando entonces debemos **<u>verificar</u>** que $x - 1 > 0$ y $7 - x > 0$. Podemos ver que $x = -5$ no cumple con $x - 1 > 0$, por lo que queda descartada, pero aún tenemos que verificar la única solución que nos queda:

- $4 - 1 = 3 > 0 \;\wedge 7 - 4 = 3 > 0$ entonces (4) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $S = \{4\}$

Ejemplo 9

Resolver la ecuación: $\log_2[9 + \log_5(x-4)] = 3$

Solución

$\log_2[9 + \log_5(x-4)] = 3$

$2^3 = 9 + \log_5(x-4)$ *(por definición de logaritmo)*

$-1 = \log_5(x-4)$

$5^{-1} = x - 4$ *(por definición de logaritmo)*

$x = \frac{1}{5} + 4$

$x = \frac{21}{5}$

<u>*Compruebe su respuesta:*</u>

Para $x = \frac{21}{5}$

$\log_2\left[9 + \log_5\left(\frac{21}{5} - 4\right)\right] = \log_2\left[9 + \log_5\left(\frac{1}{5}\right)\right] = \log_2(9-1) = \log_2 8 = 3$ ✓

Como la incógnita está sólo en el logaritmando entonces debemos **verificar** que $x-4>0$ para la solución encontrada (ya que es solución de una ecuación lineal no sabemos si serán solución de la ecuación original que es una ecuación logarítmica):

- $\frac{21}{5}-4=\frac{1}{5}>0$, entonces $\frac{21}{5}$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S}=\left\{\frac{21}{5}\right\}$

Ejemplo 10

Resolver la ecuación: $\log_2 a=\log_a 16$

$$\log_2 a=\log_a 16$$

$$\frac{\log a}{\log 2}=\frac{\log 16}{\log a} \qquad \textit{(ley de cambio de base)}$$

$$(\log a)^2=\log 2\,.\log 16 \qquad \textit{(producto cruzado)}$$

$$(\log a)^2=\log 2\,.\log 2^4$$

$$(\log a)^2=\log 2\ .4\log 2 \qquad \textit{(potencia de un logaritmo)}$$

$$(\log a)^2=2\log 2\,.2\log 2$$

$$(\log a)^2=(2\log 2)^2$$

$$|\log a|=|2\log 2| \qquad \textit{(raíz cuadrada a ambos miembros)}$$

$$|\log a|=|\log 2^2| \qquad \textit{(potencia de un logaritmo)}$$

$$\log a=\log 4\ \Rightarrow a=4 \qquad \textit{Solución 1}$$

$$\log a=-\log 4\ =\log 4^{-1}\ \Rightarrow a=\frac{1}{4} \qquad \textit{Solución 2}$$

Compruebe su respuesta:

Para $a=4$

$PM=\log_2 4=2$

$SM=\log_4 16=2$ ✅

Para $a=\frac{1}{4}$

$PM=\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=-2$

$SM=\log_{\frac{1}{4}} 16=-2$ ✅

Como la incógnita está en la base debe satisfacer que $a>0\ y\ a\neq 1$. Además, la incógnita está en el logaritmando entonces también deben verificar que $a>0$ (igual a la primera condición de la base), debemos **verificar** que se cumplen las tres restricciones (en realidad dos) para las soluciones encontradas:

- $4>0$ y $4\neq 1$; entonces (4) pertenece al conjunto solución.
- $\frac{1}{4}>0$ y $\frac{1}{4}\neq 1$; entonces $\left(\frac{1}{4}\right)$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S}=\left\{\frac{1}{4};4\right\}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 36.

De las ecuaciones logarítmicas despeje x, y exprese el conjunto solución:

a. $\ln(2+x) = 1$

b. $\log(3x+5) = 2$

c. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

d. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x-2)$

e. $\log_5 x + \log_5(x+1) = \log_5 20$

f. $\log_5(x+1) - \log_5(x-1) = 2$

g. $\log_3 x = \log_x 81$

h. $\log x + \log(x-3) = 1$

i. $\log_2(x) = 4$

j. $\log_{\mathrm{x}}(3\mathrm{x}+5) = 1$

k. $\log_{(x-1)}(x^2 - x - 9) = 1$

l. $\log_2[2 + log_2(x-1)] = 1$

m. $\log_{(1-\mathrm{x})}(2x^2 + x + 3) = 2$

Ejercicio 37.

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $log_6(x+1) + log_6 x = 1$

b) $log_3 x + log_3(3x) - log_3 3 = 4$

c) $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 3 + \ln x$

Ejercicio 38.

Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeando a cuatro lugares decimales

a. $10^{-x} = 4$

b. $3^{2x-1} = 5$

c. $2e^{12x} = 17$

d. $4 + 3^{5x} = 8$

e. $\frac{3^x}{14} = 0.1$

f. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

g. $\frac{50}{1+e^{-x}} = 4$

h. $\frac{10}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 2$

i. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

j. $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

Ejercicio 39.

Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas

A. El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función

$$n_t = 500\, e^{-0{,}45t}$$

donde *t* se mide en horas y n es el número de bacterias en miles .

a. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b. ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de tres horas?

c. ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10000?

B. En una fiesta se sirve un tazón de sopa caliente. Comienza a enfriarse según la ley de enfriamiento de Newton, de modo que su temperatura en el instante t se determina mediante

$$T_t = 65 + 145\, e^{-0{,}05t}$$

donde t representa al tiempo minutos y T la temperatura de la sopa medida en °F.

a. ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?

b. ¿Cuál es la temperatura de la sopa después de diez minutos?

c. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura será de 100°*F*?

C. Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población de peces se modela mediante la función

$$P = \frac{10}{1 + 4\, e^{-0{,}8t}}$$

donde *P* es el número de peces en miles y *t* se mide en años desde que se aprovisionó el lago.

a. Encuentre la población de peces después de tres años.

b. ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a cinco mil?

D. Los médicos emplean el yodo radiactivo como trazador para diagnosticar ciertos trastornos de la glándula tiroides. Este tipo de yodo, se desintegra de tal manera que la masa restante después de t días se determina mediante la función

$$m_t = 6\, e^{-0{,}087t}$$

donde *m* es la masa de yodo en gramos y t es el tiempo en días.

a. Encuentre la masa inicial de yodo.

b. ¿Cuánta masa queda después de veinte días?

c. ¿Cuántos días habrán transcurridos si se sabe que queda una masa de *0,57g*?

E. Un paracaidista salta desde una altura razonable al suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es de 0,2. Se puede demostrar que la velocidad de descenso de paracaidista se expresa como

$$v(t) = 80(\,1 - e^{-0{,}2t})$$

donde *t* se mide en segundos y *v(t)* se mide en pies por segundo

a. Encuentre la velocidad inicial del paracaidista.

b. Calcule la velocidad después de cinco segundos y después de diez segundos.

c. Halle el tiempo que transcurre hasta que alcanza una velocidad de 77 pies/seg