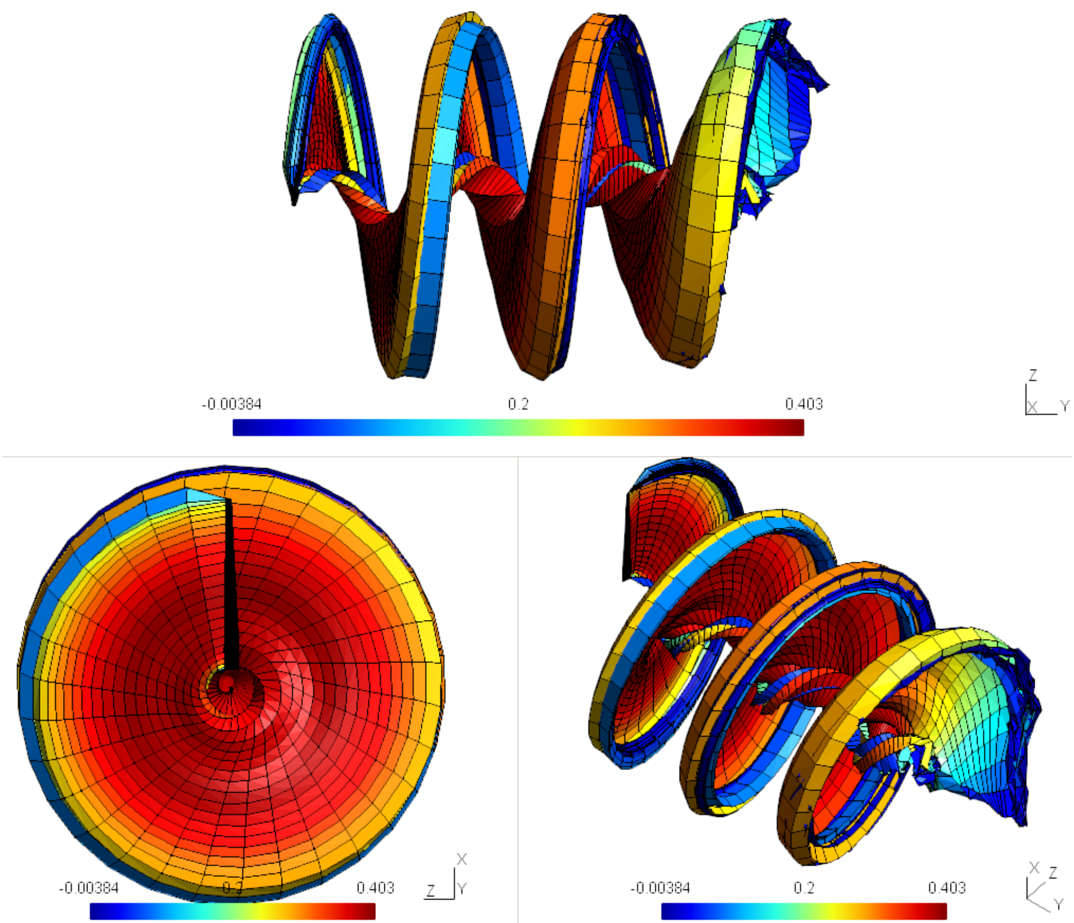
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

Aula Virtual
http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico

Unidad 2: Solución de ecuaciones nolineales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

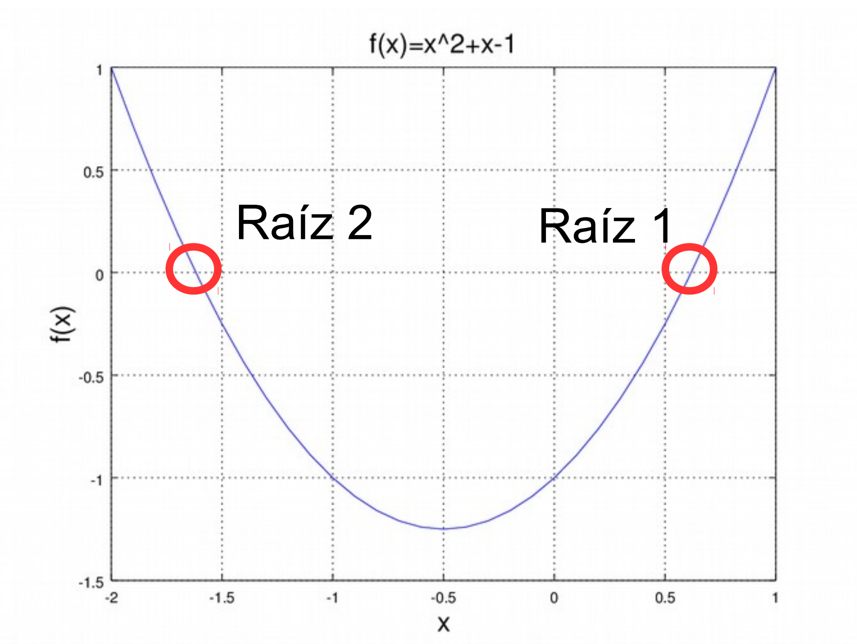
Temario:

- Raíces de funciones
- Método de la Bisección
- Método de Regula Falsi
- Método de Iteración de Punto Fijo
- Método de Newton-Raphson
- Método de la Secante
- Múltiples raíces

Raíces (soluciones) de funciones

$$f(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = 0{,}61803398874989484820458683436564 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = -1{,}61803398874989484820458683436564 \end{cases}$$



x_1 y x_2 son las "raíces" o "ceros" de la ecuación cuadrática. Es decir son los valores de x que hacen cero a la función.

Para encontrar los ceros se puede:

- Hacer "prueba y error"
- Graficar la función, evaluando la función en varios puntos y estimar un intervalo
- Usar métodos numéricos

Raíces (soluciones) de funciones

Algunos conceptos previos del análisis matemático

$v(t)=\frac{gm}{c}(1-e^{-(c/m)t})$ **Función explícita** (se puede despejar la incógnita “v”)

$f(c)=\frac{gm}{c}(1-e^{-(c/m)t})-v$ **Función implícita** (no se puede despejar “c”)

$f_n x^n+f_{n-1}x^{n-1}+\ldots+f_1 x+f_0=0$ **Función algebraica** (los polinomios son funciones algebraicas)

Funciones trascendentes: trigonométricas, exponenciales, logarítmicas.

Raíces (soluciones) de funciones

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Las raíces **pueden ser números reales o complejos**.

En general, las raíces complejas son de interés en los polinomios. Por lo tanto los métodos numéricos estándar de búsqueda de raíces se dividen en dos áreas:

- La determinación de las **raíces reales de funciones algebraicas y trascendentes**.
- La determinación de todas las **raíces reales y complejas de polinomios**.

Los métodos numéricos para raíces de funciones se clasifican en **cerrados** y **abiertos**.

Métodos cerrados

En los **métodos cerrados** se necesita **conocer un entorno** que contiene la raíz.

Se comienza con un **intervalo cerrado de partida [a,b]** en el que **f(a) y f(b) tengan distinto signo**.

Por el **teorema de Bolzano**, “Sea f una función real continua en un intervalo cerrado [a,b] con f(a) y f(b) de signos contrarios. Entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) con f(c) = 0.”

El método consiste en **ir reduciendo iterativamente el ancho del intervalo** hasta que se obtenga un determinado **error**.

Los métodos cerrados que veremos son el método de “la bisección” y el de “regula falsi”.

Método de la bisección

Para la bisección, el **proceso de subdivisión** consiste en **tomar el punto medio** del intervalo, es decir, $c=(a+b)/2$. Luego se analiza las siguientes **posibilidades**:

- $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero dentro de $[a,c]$
- $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero dentro de $[c,b]$

De esta forma se redujo el intervalo original por la mitad, reduciendo el error a la mitad.

Para continuar el proceso, **se renombra el intervalo [a,c] o [c,b] como [a,b]** y **se repite la subdivisión**. La sucesión de extremos izquierdos es creciente, mientras que la sucesión de extremos derechos es decreciente.

Método de la bisección

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

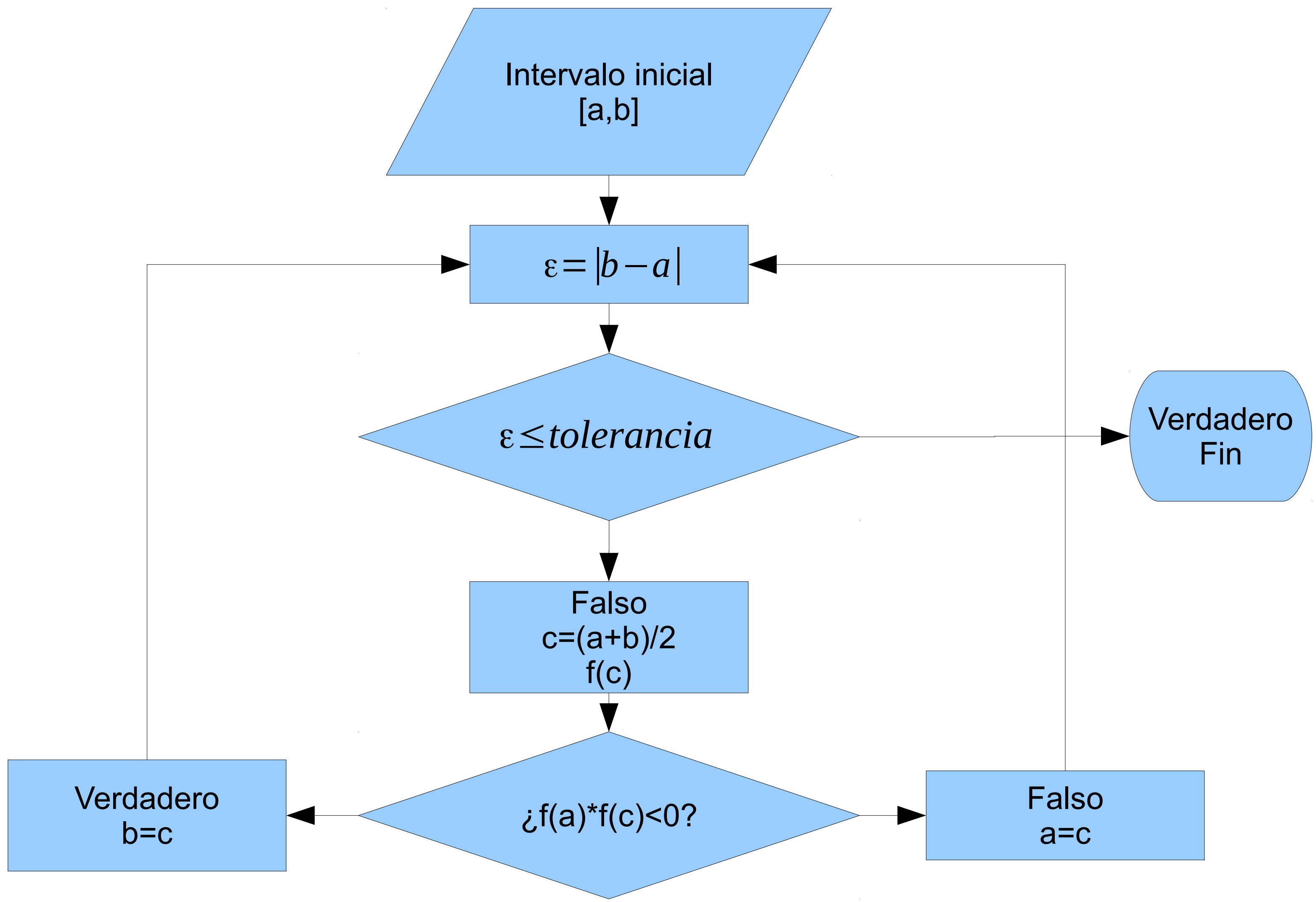
Teorema de la convergencia del método de la bisección:

Sea $f \in C[a,b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0.$

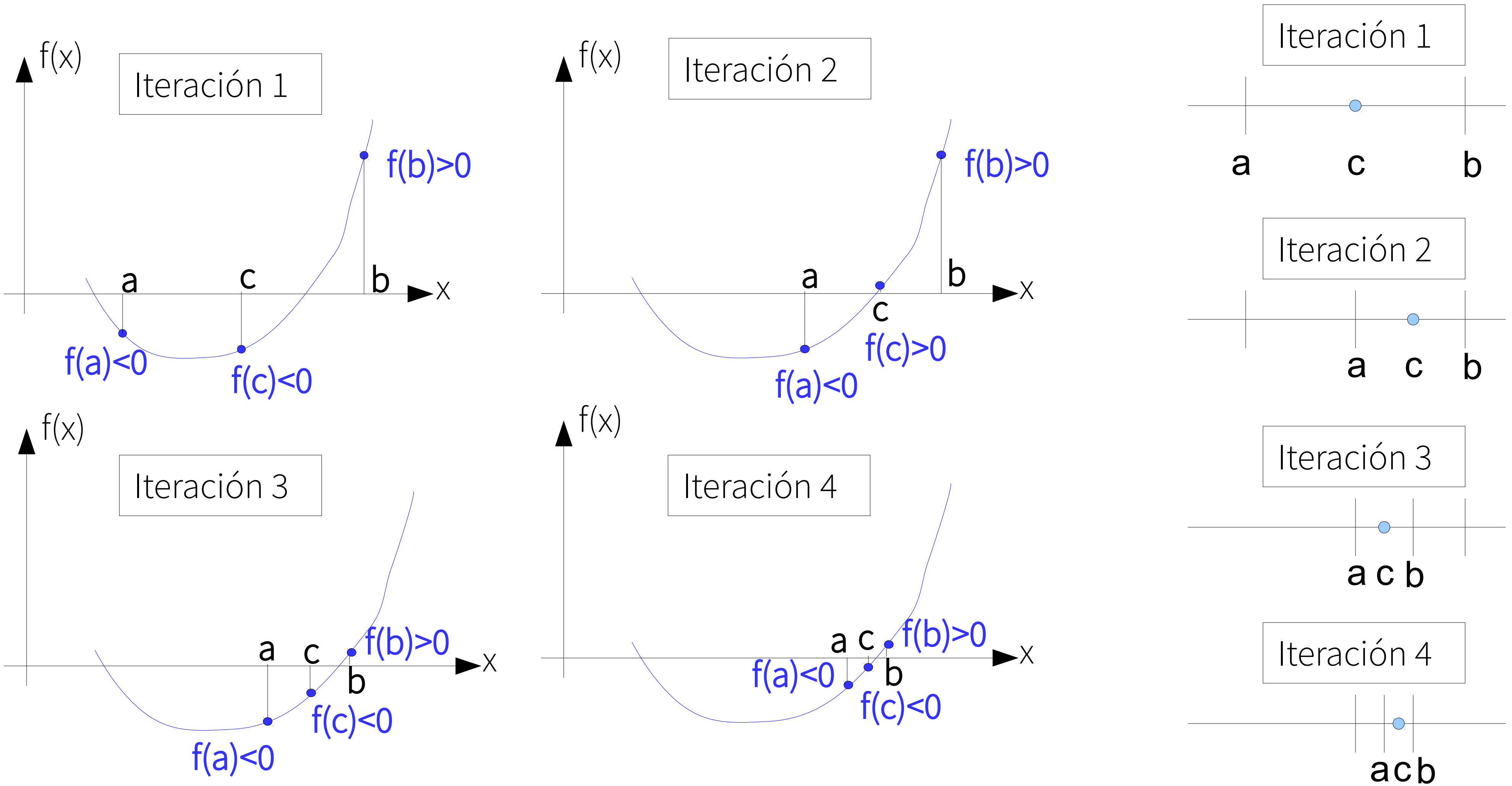
Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de puntos medios generados por el método de la bisección.

Entonces $\exists r \in [a,b] / f(r) = 0 \wedge |r - c_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ para $n = 0, 1, \ldots$

Método de la bisección



Método de la bisección



Método de la bisección

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

$$c=\frac{(a+b)}{2}$$

iteración	a	b	e	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	0	1	1	-1	1	0,5	-0,25
2	0,5	1	0,5	-0,25	1	0,75	0,3125
3	0,5	0,75	0,25	-0,25	0,3125	0,625	0,0156
4	0,5	0,625	0,125	-0,25	0,0156	0,5625	-0,1211
5	0,5625	0,625	0,0625	-0,1211	0,0156	0,5938	-0,05371
6	0,5938	0,625	0,0312	-0,0537	0,0156	0,6094	-0,0193
7	0,6094	0,625	0,0156	-0,0193	0,0156	0,6172	-0,0019
8	0,6172	0,625	0,0078	-0,0019	0,0156	0,6211	0,0069
9	0,6172	0,6211	0,0039	-0,0019	0,0069	0,6192	0,0026
10	0,6172	0,6192	0,002	-0,0019	0,0026	0,6182	0,0004
11	0,6172	0,6182	0,001	-0,0019	0,0004	0,6177	-0,0007

Error absoluto $e=b-a$

Solución analítica $x_1=-0{,}5+\sqrt{1{,}25}=0{,}61803$

Método de la bisección

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1=0$ con una tolerancia de 0,001

$$c=\frac{(a+b)}{2}$$

iteración	a	b	e	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	0	1	1	-	+	0,5	-
2	0,5	1	0,5	-	+	0,75	+
3	0,5	0,75	0,25	-	+	0,625	+
4	0,5	0,625	0,125	-	+	0,5625	-
5	0,5625	0,625	0,0625	-	+	0,5938	-
6	0,5938	0,625	0,0312	-	+	0,6094	-
7	0,6094	0,625	0,0156	-	+	0,6172	-
8	0,6172	0,625	0,0078	-	+	0,6211	+
9	0,6172	0,6211	0,0039	-	+	0,6192	+
10	0,6172	0,6192	0,002	-	+	0,6182	+
11	0,6172	0,6182	0,001	-	+	0,6177	-

Solución analítica $x_1=-0{,}5+\sqrt{1{,}25}=0{,}61803$

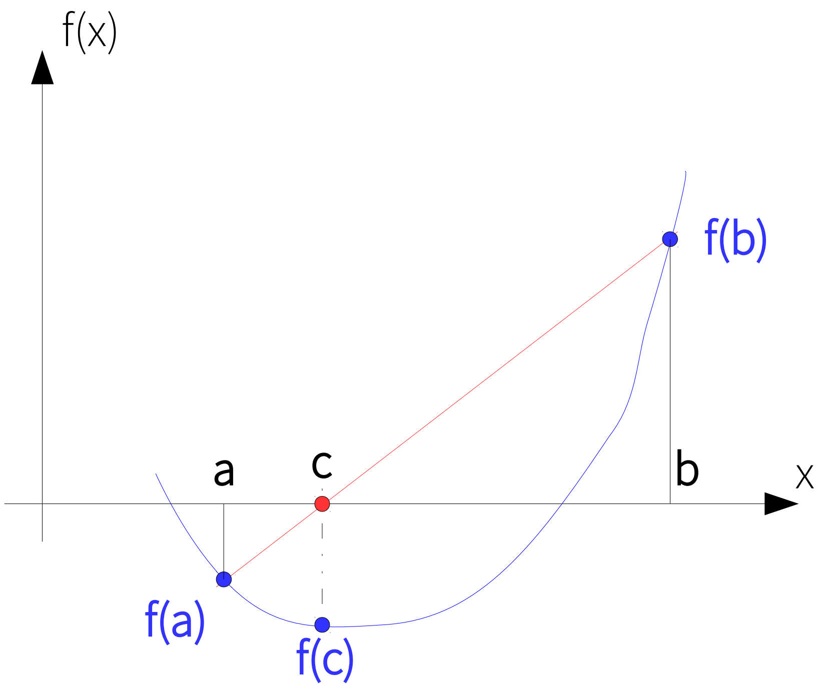
Método de Regula Falsi

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

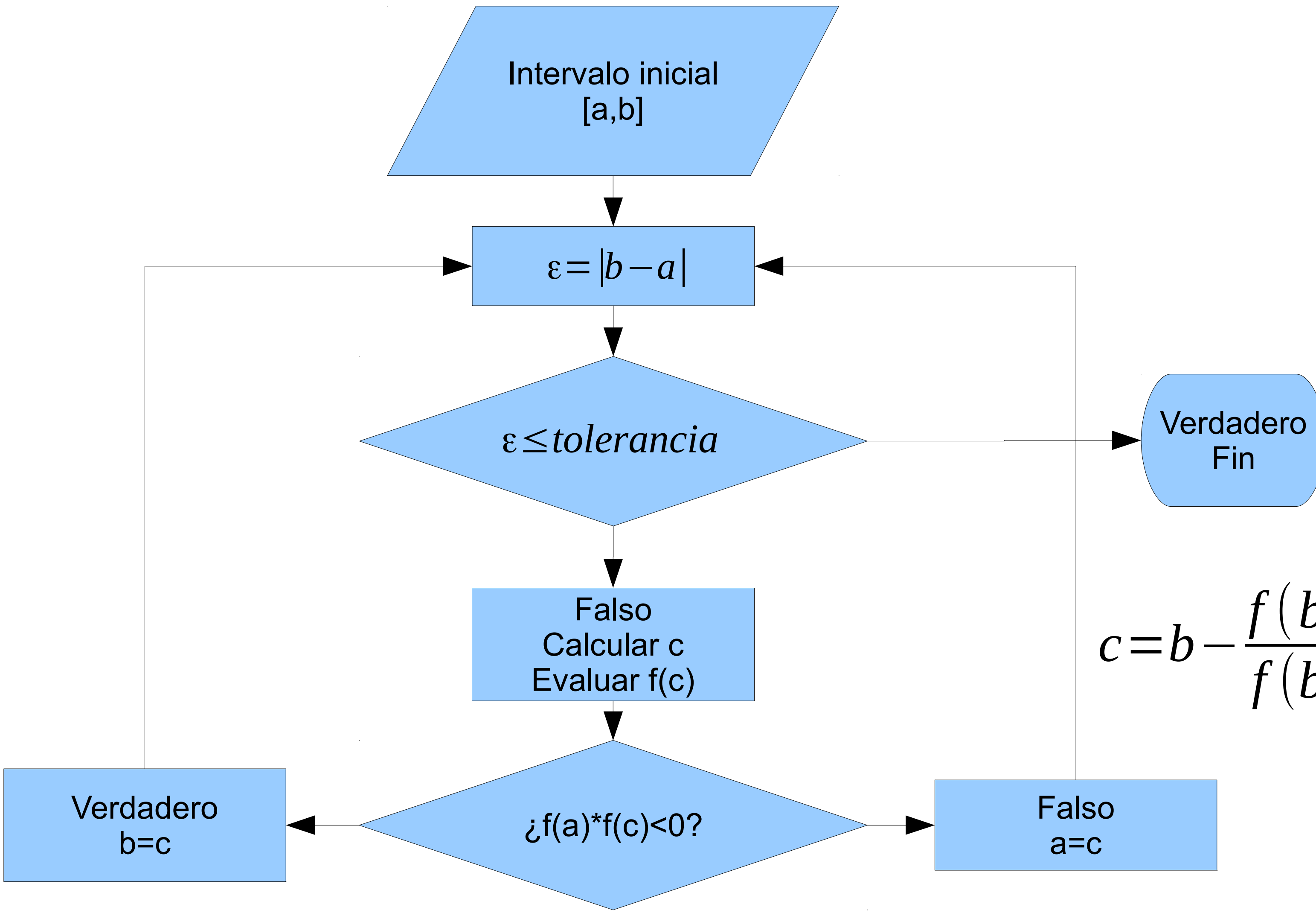
Se mejora la velocidad de convergencia de la bisección, utilizando la recta secante que une los extremos del intervalo para predecir la raíz. “Regula Falsi” proviene del latín y significa “posición falsa” debido a que c corresponde a la raíz de la recta, en vez de la función.

$$c = b - \frac{f(b)}{m}$$

$$\text{siendo } m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Método de la bisección



$$c=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Método de Regula Falsi

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

$$c=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

iteración	a	b	e	f(a)	f(b)	c	$e_{relativo}$	f(c)
1	0	1	1	-1	1	0,5	0,5	-0,25
2	0,5	1	0,5	-0,25	1	0,6	0,1	-0,04
3	0,6	1	0,4	-0,04	1	0,6154	0,0154	-0,0059
4	0,6154	1	0,3846	-0,0059	1	0,6176	0,0022	-0,0009
5	0,6176	1	0,3824	-0,0009	1	0,618	0,0003	-0,0001

Medida del error $e_{relativo}=c_i-c_{i-1}$

Solución analítica $x_1=-0,5+\sqrt{1,25}=0,61803$

Métodos abiertos

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

En los **métodos cerrados**, la raíz se encuentra encerrada dentro de un **intervalo definido** por una cota inferior y una cota superior. La aplicación reiterada del método **siempre resulta en una aproximación más cercana** al verdadero valor de la raíz. Estos métodos se denominan **"convergentes"** porque siempre se desplazan hacia el valor verdadero a medida que el método progresa.

Por otro lado, los **métodos abiertos** se basan en fórmulas que **solamente requieren uno o dos puntos iniciales que no necesitan encerrar a la raíz**. Esta ventaja no es gratis ya que, a veces, el método se aleja del valor verdadero de la raíz, es decir, **"diverge"**. Sin embargo, cuando un método abierto converge, lo hace **más rápido** que un método cerrado.
Los métodos que veremos son el método de "iteración de punto fijo", el método de "Newton-Raphson" y el método de "la secante".

Método de iteración de punto fijo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Definiciones:

1. Un **punto fijo** de una función g(x) es un número real P tal que P = g(P). Geométricamente los puntos fijos **son los puntos de intersección de la función y=g(x) con la recta y=x.**
2. La iteración $p_{n+1} = g(p_n)$ para n=0,1,... se llama **iteración de punto fijo**.

Teoremas de existencia:

$1)$ Sea g una funcion continua y $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión generada por iteración de punto fijo.
Si $\lim_{n\to\infty} p_n = P$, entonces P es un punto fijo de $g(x)$

$2)$ Si la imagen de $y=g(x)$ verifica que $y\in[a,b]\,\forall\, x\in[a,b] \to g$ tiene un punto fijo en $[a,b]$

$3)$ Si $g'(x)$ está definida en $(a,b) \wedge |g'(x)|<1\ \forall\, x\in(a,b) \to g$ tiene un único punto fijo P en $[a,b]$

Teoremas de convergencia:

$4)$ Sean g, g' funciones $\in C[a,b], K$ una constante positiva $, p_0\in(a,b)$
y $g(x)\in[a,b]\,\forall\, x\in[a,b]$. Entonces hay un punto fijo P de g en $[a,b]$.
Si $|g'(x)|\leq K<1\ \forall\, x\in[a,b] \to P$ es el único punto fijo de g $\in[a,b] \wedge p_n = g(P_{n-1})$ converge a P
Si $|g'(x)|>1 \wedge p_0 \neq P \to p_n = g(P_{n-1})$ no converge a P

Método de iteración de punto fijo

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Aplicación del método

1) Se reacomoda la ecuación $f(x)=0$ de modo que quede de la forma $x=g(x)$

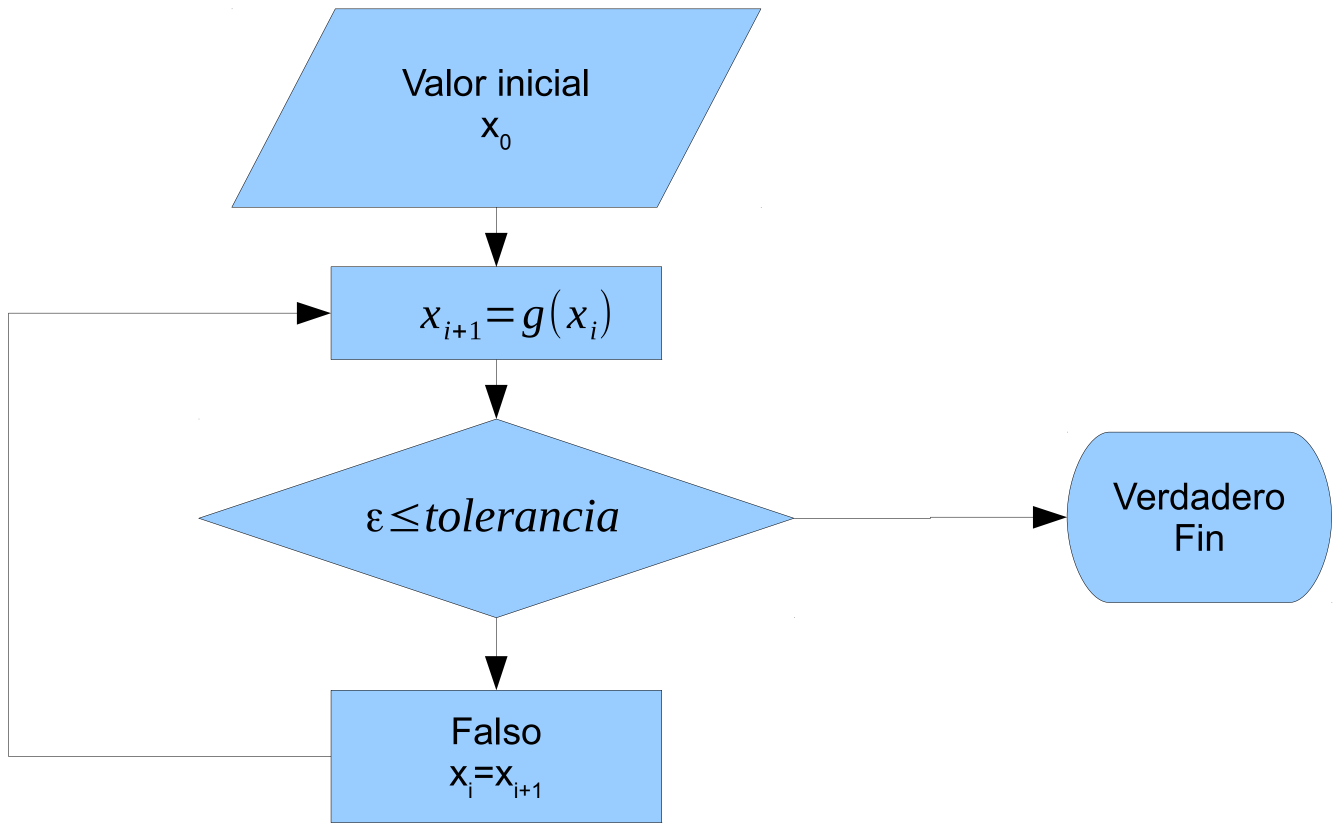
Esta transformación se puede realizar por despeje algebraico o simplemente sumando la variable en ambos miembros.

2) Se parte de un valor inicial x_0

3) Se utiliza la fórmula para predecir la nueva aproximación de la raíz $x_{n+1}=g(x_n)$

4) El error se determina como $\varepsilon=\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right|100\,\%$

Método de iteración de punto fijo



Método de iteración de punto fijo

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_n	x_{n+1}	e
1	0	1	#DIV/0!
2	1	0	1
3	0	1	#DIV/0!
4	1	0	1
5	0	1	#DIV/0!

$$x_{n+1}=g(x_n)=1-x_n^2$$

Medida del error $$\varepsilon=\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right|$$

Solución analítica $$x_1=-0{,}5+\sqrt{1{,}25}=0{,}61803$$

Método de iteración de punto fijo

¿¿¿Qué pasó??? Explotó!

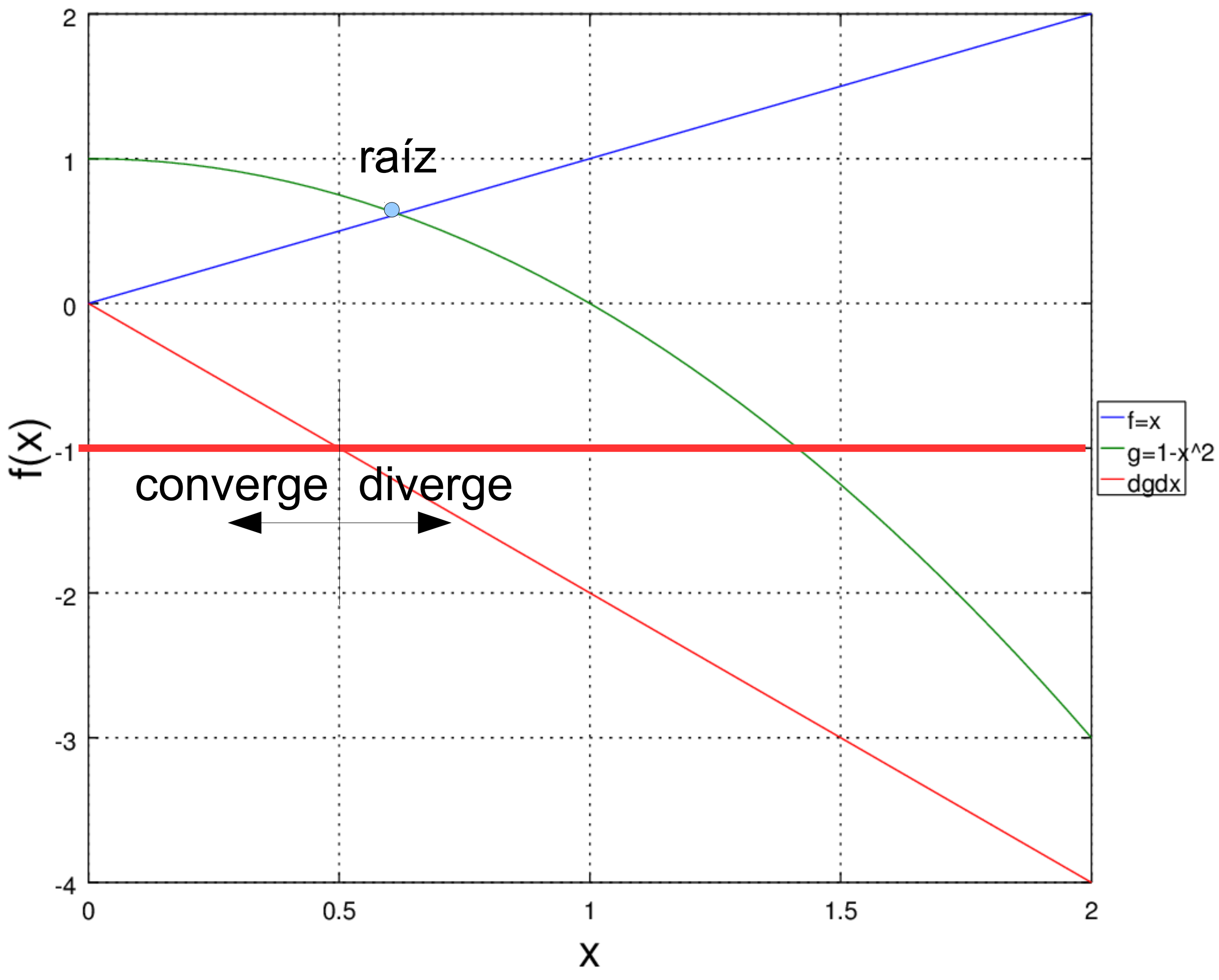
¿Hubo un error en el programa? ¿está mal el valor inicial?

Revisemos los teoremas de convergencia...

Sean g, g' funciones $\in C[a,b], K$ una constante positiva $, p_0 \in (a,b)$
y $g(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b]$. Entonces hay un punto fijo P de g en $[a,b]$.
Si $|g'(x)| \leq K < 1 \; \forall x \in [a,b] \rightarrow P$ es el único punto fijo de g $\in [a,b] \wedge p_n = g(P_{n-1})$ converge a P
Si $|g'(x)| > 1 \wedge p_0 \neq P \rightarrow p_n = g(P_{n-1})$ no converge a P

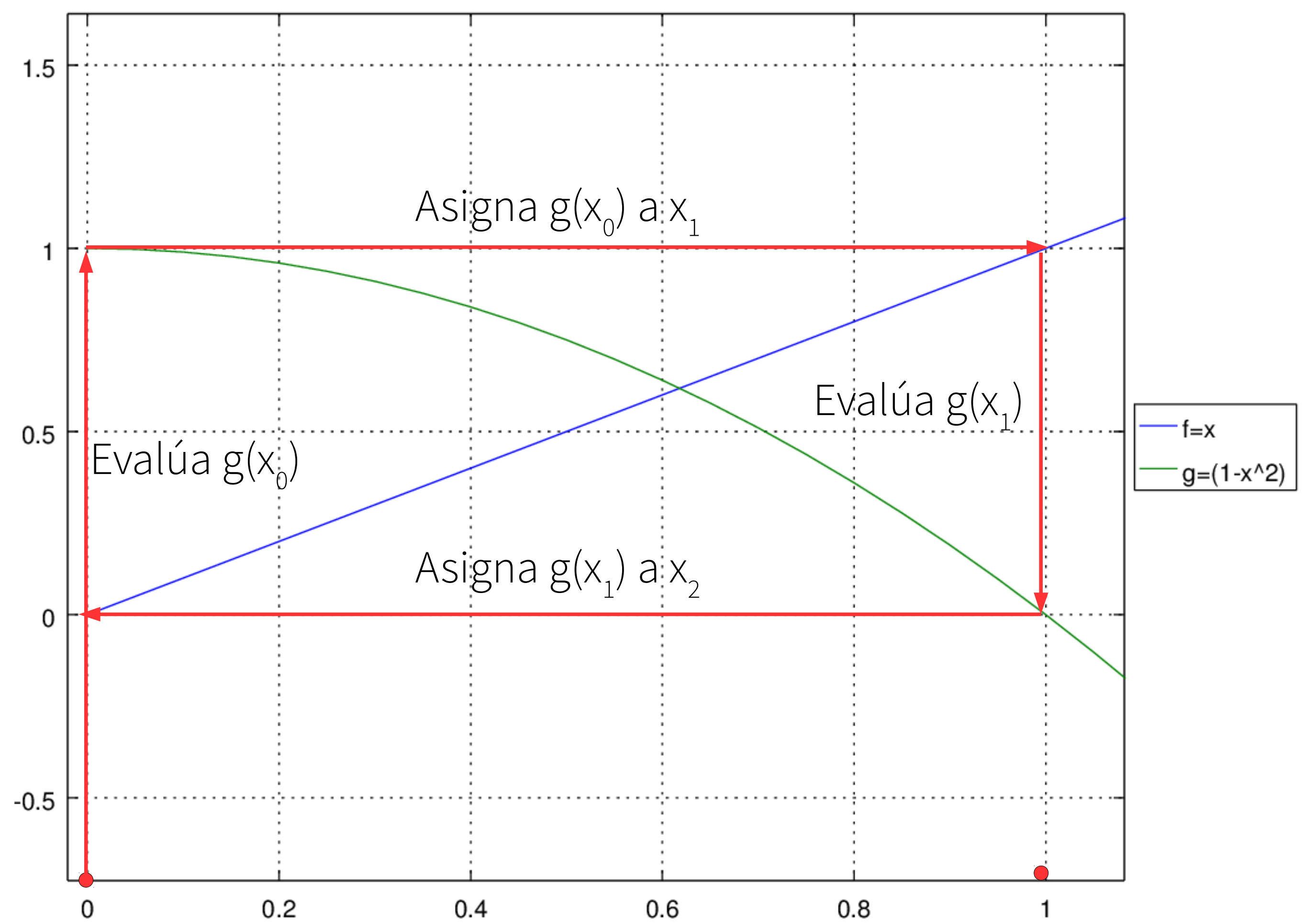
$g(x) = 1 - x^2$
$g'(x) = -2x \rightarrow |g'(x)| = |-2x| \leq 1 \rightarrow -0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ El intervalo de convergencia excluye a la raíz

Método de iteración de punto fijo



Método de iteración de punto fijo

Veamos la evolución del proceso en forma gráfica



Método de iteración de punto fijo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+\mathbf{4}x-1=0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_n	x_{n+1}	e
1	0	0,25	#DIV/0!
2	0,25	0,2344	0,0625
3	0,2344	0,2363	0,0080729167
4	0,2363	0,23604	0,0009422568
5	0,23604	0,23607	0,0001113646

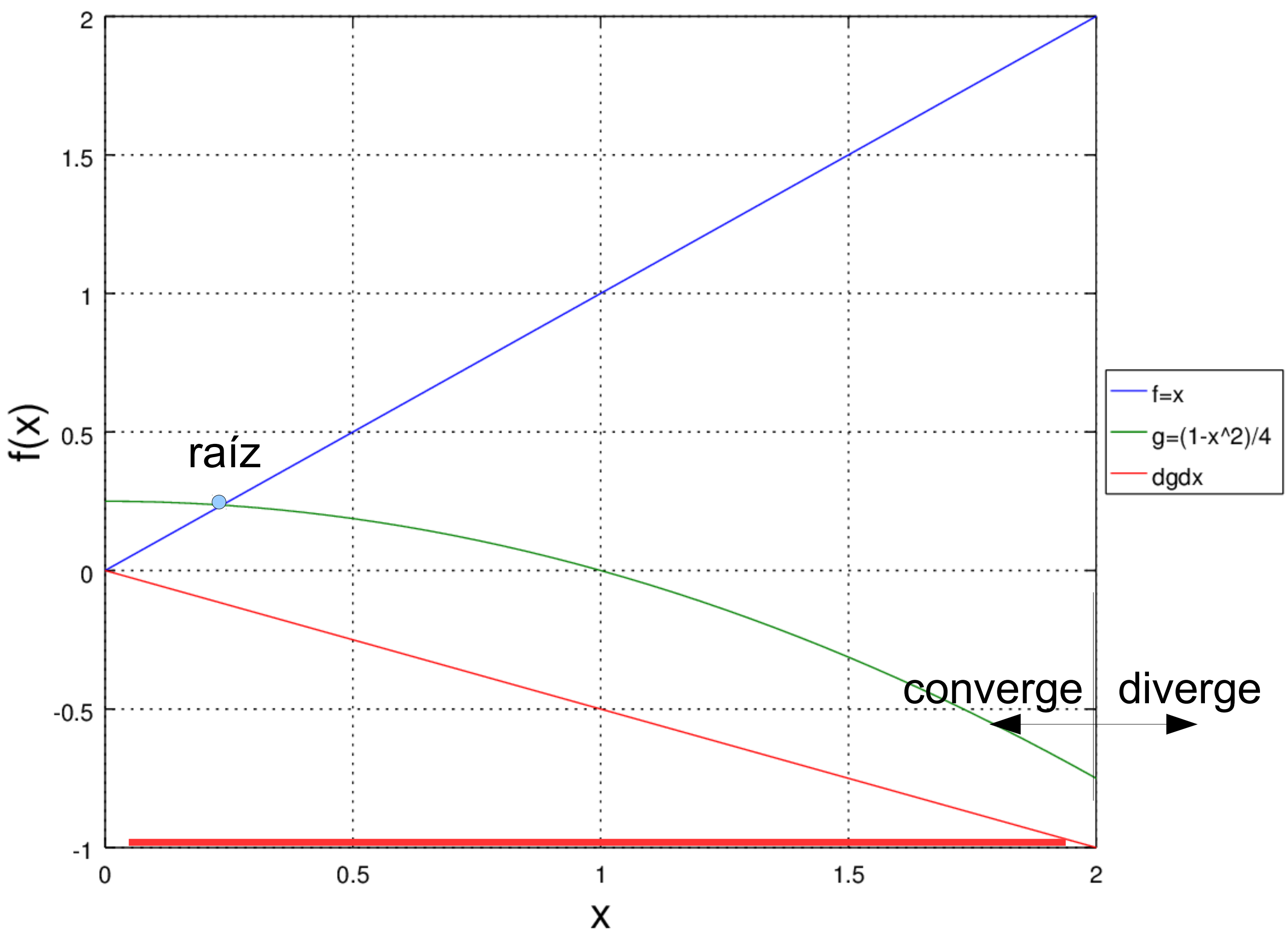
$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{1-x_n^2}{4}$$

Solución analítica $x_1=-2+\sqrt{5}=0{,}236068$

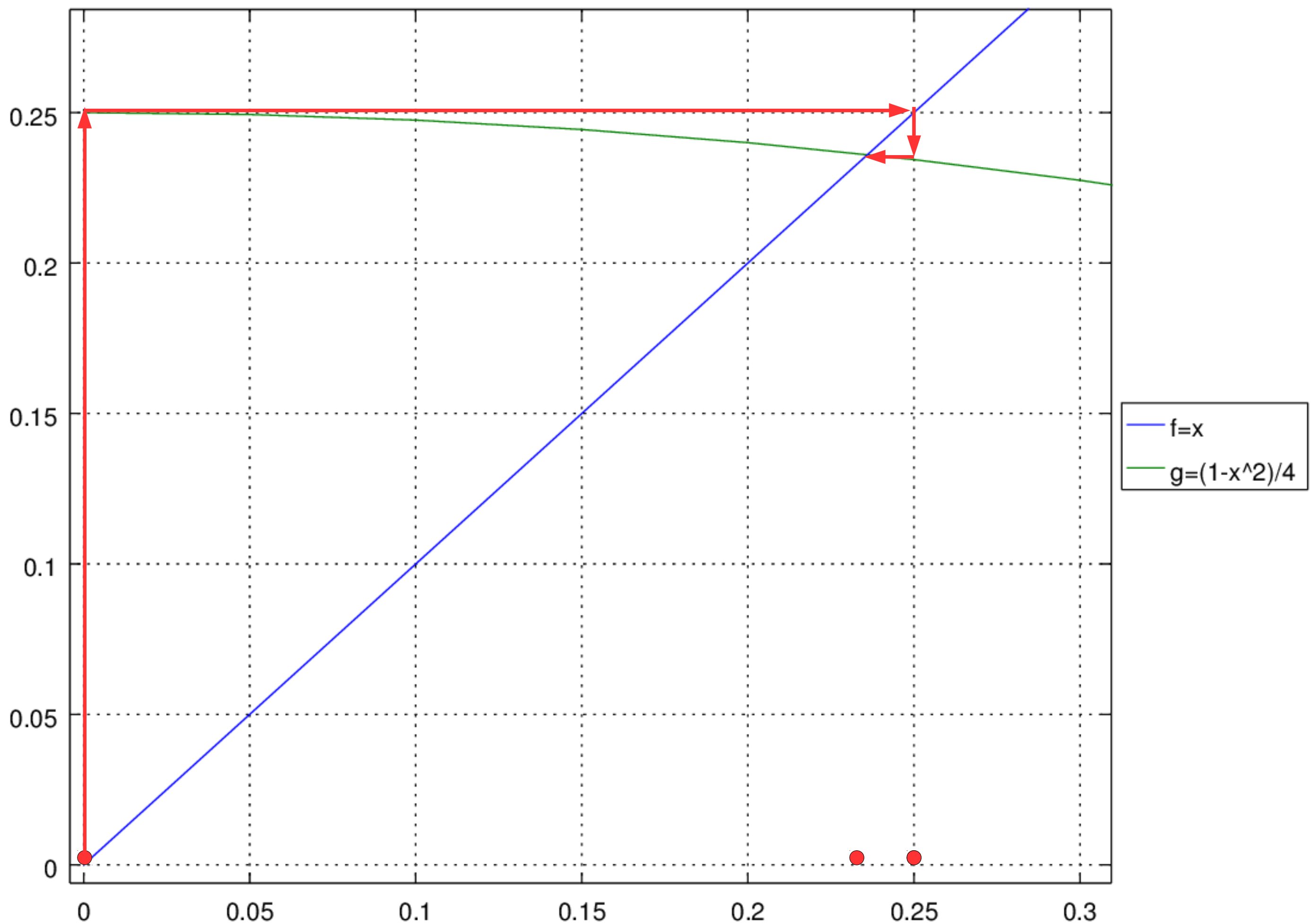
$$g'(x)=-\frac{1}{2}x \rightarrow |g'(x)|=\left|-\frac{1}{2}x\right|\leq 1 \rightarrow -2\leq x\leq 2$$

El intervalo de convergencia incluye a la raíz

Método de iteración de punto fijo



Método de iteración de punto fijo



Método de Newton-Raphson

Teorema de Newton-Raphson

Sea f una función $\in C^2[a,b] \wedge \exists$ un número $p \in [a,b] / f(p)=0$

Si $f'(p) \neq 0 \rightarrow \exists \delta > 0 / \{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por el proceso iterativo

$$p_k = g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})} \quad \text{para } k=1,2,\dots$$

converge a p cualquiera que sea la aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$

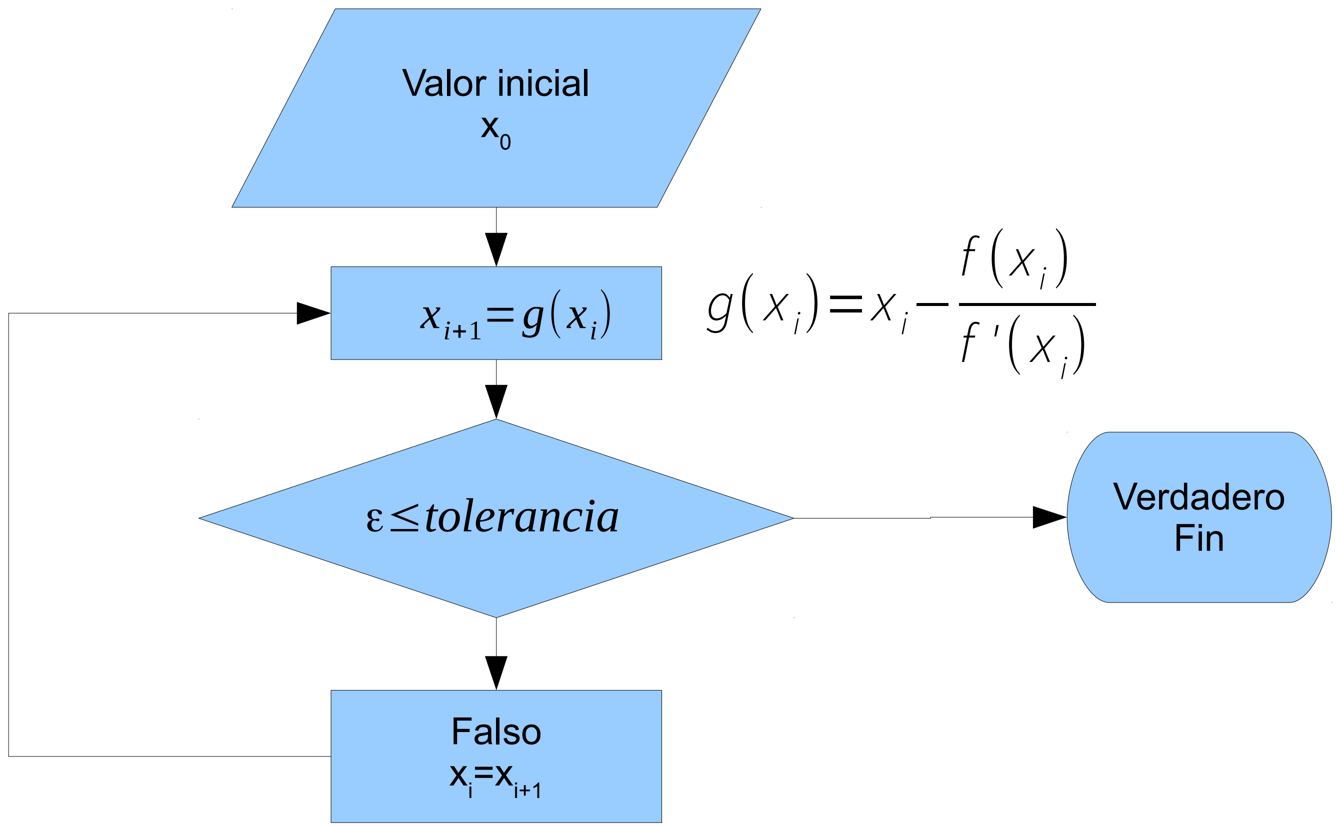
La función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ se llama **función de iteración de Newton-Raphson**

Derivación de la función de Newton-Raphson

La linealización de la función $f(x)$ por series de Taylor resulta $f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

Si consideramos el cero de la función $0 \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \rightarrow x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	0	-1	1	1	#DIV/0!
2	1	1	3	0,6667	0,3333
3	0,6667	0,1111	2,333	0,6190	0,0714
4	0,6190	0,0023	2,2381	0,61803	0,0016
5	0,61803	1,0265E-06	2,2361	0,61803	7,4279E-07

Método de Newton-Raphson

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=e^{-x}=0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	1	0,3679	-0,3679	2	1
2	2	0,1353	-0,1353	3	0,5
3	3	0,0498	-0,0498	4	0,3333333333
4	4	0,0183	-0,0183	5	0,25
5	5	0,0067	-0,0067	6	0,2
100	1,00E+02	3,72E-44	-3,72E-44	101	0,01
500	5,00E+02	7,12E-218	-7,12E-218	501	0,002
745	7,45E+02	1E-323	-1E-323	746	0,0013422819
746	746	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!

Explota por aritmética de punto flotante. Además la convergencia es lenta debido a que f y f' son muy parecidas

Método de Newton-Raphson

Ejemplo: f(x)=atan(x)=0 con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	1,4500	0,9670	0,3223	-1,5503	2,0691
2	-1,5503	-0,9979	0,2938	1,8459	-2,1907
3	1,8459	1,0743	0,2269	-2,8891	2,5651
4	-2,8891	-1,2376	0,1070	8,6784	-4,0038
5	8,6784	1,4561	0,0131	-102,4426	12,8042
6	-102,4426	-1,5610	0,0001	16281,3694	-159,9317
7	16281,3694	1,5707	0,0000	-416358823,9128	25573,7153
8	-416358823,9128	-1,5708	0,0000	272304878428811000,0000	-654014910,2309

Oscila alrededor de la solución y luego explota

Método de Newton-Raphson

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: f(x)=atan(x)=0 con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	0,5000	0,4636	0,8000	-0,0796	1,1591
2	-0,0796	-0,0794	0,9937	0,0003	-1,0042
3	0,0003	0,0003	1,0000	0,0000	1,0000
4	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0

Si el punto inicial es próximo a la raíz, converge

Conclusión, el método de Newton-Raphson es más rápido pero es más inestable, dependiendo del valor inicial que se utilice y de las propiedades de la función.

Método de la secante

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Un inconveniente adicional del método de Newton-Raphson es la evaluación de la derivada. A veces la función es muy compleja para su evaluación. Una solución es aproximar la derivada de la función con una **“diferencia finita hacia atrás”**.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$$

La fórmula de iteración resultante es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{m}, \text{ siendo } m = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Para iniciar el método se requiere proponer dos puntos x_0 y x_1.

Método de la secante

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	x_{i+1}	e
	0,0000	-1,0000		
1	1,0000	1,0000	0,5000	0,5000
2	0,5000	-0,2500	0,6000	0,2000
3	0,6000	-0,0400	0,6190	0,0317
4	0,6190	0,0023	0,6180	0,0017
5	0,6180	0,0000	0,6180	0,0000

Múltiples raíces

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Cuando se buscan las raíces de una función algebraica, en particular polinomios, hay más de una raíz. Si utilizamos los métodos abiertos o cerrados en forma directa, siempre se encontrará la misma raíz. Para poder dar con las demás soluciones se debe factorizar la función y resolver otra de grado menor. Este proceso se denomina **deflación**.

Regla de Descartes para determinar la cantidad de raíces positivas y negativas de polinomios:

1) La cantidad de raíces reales positivas es igual a la cantidad de cambios de signo en Pn(x), o menos, por una cantidad par.

2) La cantidad de raíces reales negativas es igual a la cantidad de cambios de signo en Pn(-x), o menos, por una cantidad par.

$$P_3(x)=x^3-2x^2-8x+27 \rightarrow P_3(-x)=-x^3-2x^2+8x+27$$

Contando los cambios de signo se puede ver que hay 2 raíces reales positivas y 1 negativa

Múltiples raíces

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Método de Horner para deflación de polinomios

Sea Pn(x) un polinomio y sea **x=r una raíz conocida**. Se puede factorizar el polinomio original de la siguiente forma:

$$P_n(x)=a_1 x^n+a_2 x^{n-1}+\ldots+a_n x+a_{n+1}=(x-r)(b_1 x^{n-1}+b_2 x^{n-2}+\ldots+b_{n-1} x+b_n)$$

Distribuyendo la multiplicación se puede expresar el lado derecho así

$$(x-r)(b_1 x^{n-1}+b_2 x^{n-2}+\ldots+b_{n-1} x+b_n)=b_1 x^n+(b_2-r\,b_1)\,x^{n-1}+(b_3-r\,b_2)\,x^{n-2}+\ldots$$

Se pueden igualar los términos del mismo orden y obtener los coeficientes b $_k$ del polinomio de orden reducido

$$b_1=a_1$$

$$b_k=a_k+r\,b_{k-1}, \text{para } k=2,\ldots,n$$

Múltiples raíces

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo $P_3(x)=-3x^3-4x^2+x+1=0$

Observando los cambios de signo, tenemos 1 raíz positiva y 2 negativas. Buscando la raíz por el método de la secante entre -10 y 10 se obtiene **r_1** = -1,40147

$$-3x^3-4x^2+x+1=(x-(-1{,}40147))(b_1x^2+b_2x+b_3)$$

$$-3=b_1$$

$$-4=b_2-(-1{,}40147)(-3)\rightarrow b_2=0{,}20441$$

$$1=b_3-(-1{,}40147)(0{,}20441)\rightarrow b_3=0{,}71353$$

$$(x+1{,}40147)P_2(x)=0,\text{ donde } P_2(x)=(-3x^2+0{,}20441x+0{,}71353)$$

Buscando la raíz por el método de la secante entre -2 y 0 se obtiene **r_2** = -0,45481

$$-3x^2+0{,}20441x+0{,}71353=(x-(-0{,}45481))(b_1x+b_2)$$

$$-3=b_1$$

$$0{,}20441=b_2-(-0{,}45481)(-3)\rightarrow b_2=1{,}56884$$

$$(x+1{,}40147)(x+0{,}45481)P_1(x)=0,\text{ donde } P_1(x)=(-3x+1{,}56884)$$

Finalmente la tercer raíz es **r_3** = 0,52295