**Unidad 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

* **Introducción**

Una recta en el plano se puede representar algebraicamente mediante la ecuación lineal de la forma:

a1x+a2y = b

en donde a1, a2 y b son escalares, x e y son variables.

En general, se define una **ecuación lineal** con n variables x1, x2, …, xn, como aquella que se puede expresar en la forma:

**a1x1+a2x2+…+anxn= b**

en donde a1, a2, …, an se llaman coeficientes y b el término independiente.

En las ecuaciones lineales las variables se presentan únicamente a la primera potencia, y no figuran como argumento de funciones trigonométricas ni de exponenciales.

Una solución de una ecuación lineal de la forma a1x1+a2x2+…+anxn = b, es una sucesión de n números s1, s2, …, sn, tales que la ecuación se satisface cuando se realiza la sustitución x1=s1, x2=s2, …, xn=sn.

Se denomina **conjunto solución** S, al conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación dada: S = {(s1, s2, …, sn )}

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 1.*
* **Sistemas de ecuaciones lineales**

Un conjunto finito de ecuaciones lineales con las variables x1, x2, …, xn, se conoce como sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal.

Un sistema arbitrario de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas se puede representar de la siguiente manera:

****

En el cual x1, x2, …, xn corresponden a las variables o incógnitas del sistema, y las aij y las bi (con i variando de 1 a m, j variando de 1 a n), denotan escalares constantes. En este caso se dice que el sistema es de orden **mxn**.

Una sucesión de escalares s1, s2, …, sn es una solución del sistema si la sustitución x1=s1, x2=s2, …, xn=sn es una solución de toda ecuación en tal sistema. Un sistema de ecuaciones lineales puede admitir una **única solución** (conjunto solución unitario), o **infinitas soluciones** (conjunto solución infinito), o **carecer de solución** (conjunto solución vacío).

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si poseen el mismo conjunto solución.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 2 y 3.*
* **Representación de sistemas de ecuaciones lineales**

**Representación matricial:**

Los sistemas de ecuaciones lineales de orden mxn, también se pueden representar en forma matricial, lo que favorece en ciertos casos a su notación y resolución.

Dado el sistema:

****

Si llamamos matriz principal o de coeficientes a la matriz A = ****, matriz de incógnitas a la matriz X = **,**y matriz de los términos independientes a B= . Su representación matricial consiste en escribirlo de la siguiente manera:

**.=** 

Es decir, su forma matricial es: **A . X = B**

Se denomina matriz ampliada o aumentada del sistema, a la matriz A’= A\* dada por:

A\* = A’=****

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 4.*

**Representación vectorial:**

Los sistemas de ecuaciones lineales de orden mxn, también se pueden representar en forma vectorial, es decir como combinación lineal de vectores de IRm (los vectores columna de la matriz A):

****

Teorema

***Todo sistema de ecuaciones lineales no posee solución, posee solución única o infinitas soluciones.***

Demostración

Si A . X = B es un sistema de ecuaciones lineales dado en su forma matricial, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1. El sistema no posee solución.
2. El sistema posee solución única.
3. El sistema admite más de una solución.

Se completa la demostración si se puede probar que el sistema tiene infinitas soluciones.

Suponiendo que el sistema A .X = B posee más de una solución y que X1 y X2 son dos soluciones diferentes. Por lo tanto, verifica:

AX1= B y también AX2 = B.

Al restar estas ecuaciones resulta: AX1-AX2 = B – B = 0

Luego aplicando propiedades matriciales, se puede escribir como: A.(X1- X2) = 0

Si se considera X0 = X1-X2 y k un escalar cualquiera, entonces:

A(X1+kX0) = AX1+A(kX0) = AX1+k(AX0) = B +k.0 = B+0 =B

Luego: A(X1+kX0) = B

Se desprende que X1+kX0 , es una solución del sistema A . X = B, ya que existe una infinidad de valores que puede tomar k. Luego el sistema AX = B posee infinitas soluciones.

* **Rango de una matriz**

Dada una matriz de orden mxn, se puede definir el **rango** como la cantidad de filas no nulas que resultan al expresar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

* **Teorema de Rouché – Frobenius (o de Kroenecker- Capelli)**

Este teorema permite analizar el tipo de solución que posee un sistema de ecuaciones lineales, considerando la noción de rango de la matriz principal, y del rango de la matriz ampliada.

(No daremos la demostración del Teorema porque se necesitan conceptos previos que todavía no hemos tratado).

El teorema de Rouché – Frobeniusestablece que para que un sistema de ecuaciones lineales sea **compatible** (posea solución) es condición necesaria y suficiente que la matriz principal y la matriz ampliada posean el mismo rango. Por lo demás, el sistema constituido será **compatible determinado** si su rango coincide con el número de incógnitas, o será **compatible indeterminado** si posee un valor menor a tal número. Cuando el rango de ambas matrices es diferente, se dice que el sistema es **incompatible** (solución vacía).

Es decir, dado un sistema de ecuaciones lineales, si A es la matriz principal, A\* es la matriz ampliada y n es el número de incógnitas, se puede afirmar que:

* Si el rango (A) = rango (A\*) = n, el sistema es **compatible determinado** (solución única).
* Si el rango (A) = rango (A\*) < n, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).
* Si el rango (A) ≠ rango (A\*), el sistema es **incompatible** (solución vacía).
* **Operaciones elementales entre ecuaciones**

Existen varios y diversos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Un método básico consiste en reemplazar el sistema dado por uno equivalente que posea el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver. En general, este sistema nuevo se obtiene siguiendo una serie de pasos, es decir aplicando las operaciones elementales entre ecuaciones que consisten en:

* Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.
* Intercambiar dos de las ecuaciones.
* Sumar algebraicamente, un múltiplo de una de las ecuaciones a otra.

Si utilizamos la notación matricial del sistema de ecuaciones, se podrán aplicar estas operaciones elementales a las filas de la matriz ampliada, que consisten en:

* Multiplicar a una de las filas por una constante no nula.
* Intercambiar dos de las filas.
* Sumar algebraicamente, un múltiplo de una de las filas a otra.
* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 5, 6 y ,7.*
* **Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos**

Se denomina sistema de ecuaciones lineales homogéneo, al sistema que presenta la forma:

****

Es decir, cuando en la forma matricial del sistema A. X = B, la matriz B es nula. Los sistemas homogéneos admiten, por lo tanto, la notación matricial:

**A.X = 0**

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo admite solución, es decir son compatibles. Si el conjunto solución está formado por s1=0, s2=0, …, sn=0, se dice que admite la **solución trivial**, es decir:

S = {(0, 0,…,0)}.

Si existen otras soluciones no nulas, se dice que son **soluciones no triviales.**

Una manera sencilla de analizar y determinar la solución en un **sistema de ecuaciones lineales homogéneo**, es calcular el valor del determinante de su matriz principal. Si el determinante de la matriz principal es no nulo, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo admite la solución trivial, en cambio, si el determinante de la matriz principal es nulo, admite infinitas soluciones.

Si **det (A) ≠ 0** admite la solución trivial

Si **det(A) = 0**, admite infinitas soluciones

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 8.*

Un caso particular del teorema de Rouché – Frobeniusse aplica a los sistemas homogéneos. En este sentido, las matrices A  y  A\*  son  semejantes a efectos del cálculo del rango. Por lo tanto, siempre se cumple que rango (A) = rango (A\*). Esto quiere decir que todos los sistemas homogéneos son siempre **compatibles**. Es decir:

* Si el rango (A) = rango (A\*) = n, el sistema es **compatible determinado** (solución trivial).
* Si el rango (A) = rango (A\*) < n, el sistema es **compatible indeterminado** (solución no trivial).
* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 9 y 10.*

* **Método de Gauss- Jordan**

El método de Gauss- Jordan es uno de los tantos métodos directos que se aplican para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Consiste en reducir la matriz ampliada del sistema, a la forma **escalonada reducida**, la cual determina una forma lo suficientemente simple para que el sistema pueda resolverse por sustitución regresiva.

Dado el sistema de orden mxn

****

Y su matriz ampliada:



Para encontrar su forma **escalonada reducida**, se aplicarán sucesivamente las operaciones elementales entre filas hasta obtener la matriz del tipo:



Al elemento 1 que figura en la primera columna de la matriz, se lo denomina 1 **principal** o **elemento** **pivote**.

Aclaración:

La matriz escalonada por filas posee ceros debajo de cada pivote, en cambio la escalonada reducida por filas posee ceros tanto arriba y debajo de cada pivote.

Es decir: A = es una matriz escalonada por filas

B =  es una matriz escalonada reducida por filas

Si, por una sucesión de operaciones elementales sobre las filas, la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales adquiere la forma escalonada reducida, entonces es posible obtener el conjunto solución para el sistema dado realizando sustituciones regresivas, en este proceso se basa el método de Gauss - Jordan. En cambio, el método de Gauss consiste en obtener la solución del sistema de ecuaciones lineales, cuando al aplicarle las operaciones elementales a su matriz ampliada, se la transforma en una escalonada por filas.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 11 y 12.*
* **Regla de Leibniz- Cramer**

Consiste en uno de los métodos directos que se utiliza para obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales de orden nxn.

Teorema

***Sea A.X = B un sistema de ecuaciones lineales de orden n, este sistema posee solución única si y solo si el determinante de su matriz principal A es no nulo, en cuyo caso el conjunto solución S = {( x1, x2, …, xn)}, siendo:***

*** , , ….., ***

***En donde Aj es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz B.***

Demostración

*Implicación a derecha*:

Si un sistema A.X = B de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única, entonces el determinante de su matriz principal A es no nulo.

Si un sistema A . X = B tiene solución única, su matriz asociada A admite inversa, por lo tanto det (A) ≠ 0.

*Implicación a izquierda:*

Si el determinante de la matriz principal de un sistema de ecuaciones de la forma A . X = B de orden n, es no nulo, entonces el sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única

Si el det (A) ≠ 0, implica que admite matriz inversa, entonces recordando que: ****** (1)

En la expresión matricial del sistema A . X = B multiplicamos a la izquierda por A-1 en ambos miembros:

A-1. (A . X ) = A –1 . B

Por propiedad asociativa: (A-1. A ). X = A –1 . B

I.X = A –1 . B

X = A –1 . B

Al sustituir por la expresión (1), resulta: X = ***.***B, es la única solución al sistema.

Escrito en forma matricial resulta la solución al sistema:

= ****** 

Obsérvese que la j-ésima fila sería:

x j= ****** ( b1. c1j + b2 . c2j + … + bn . cnj ) = ******

En donde la matriz A j es la que resulta de sustituir la j-ésima columna de la matriz A por B.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 13.*