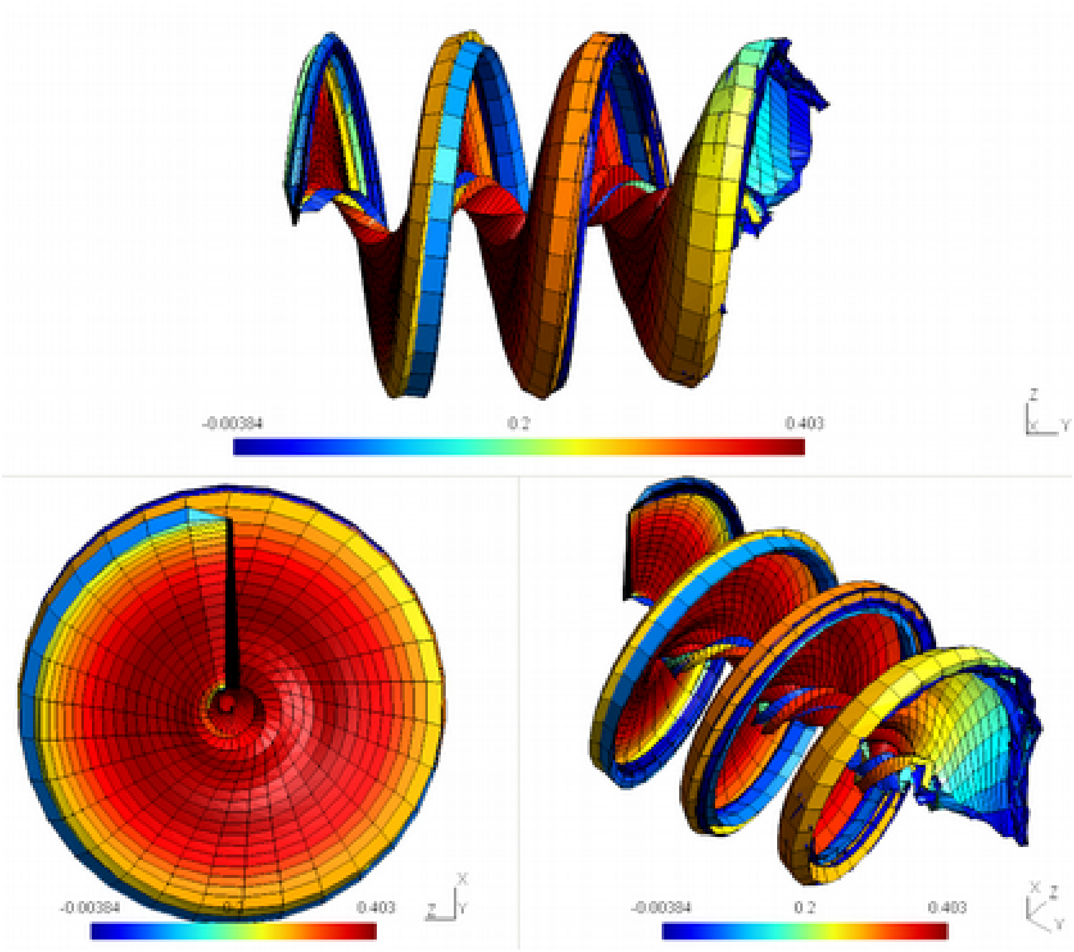


Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

Aula Virtual
http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico

Unidad 3: Solución de SEL

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario:

- Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)
- Unicidad de solución y número de condición
- Métodos directos vs Iterativos
- Eliminación de Gauss
- Descomposición LU, Doolittle, Choleski
- Solución de SEL con matrices de términos independientes
- Inversión de Matrices
- Método iterativo de Jacobi
- Método iterativo de Gauss-Seidel

Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

En general, la mayoría de los métodos numéricos produce un sistema de ecuaciones simultáneas.

Los sistemas que resultan de la representación de problemas reales suelen ser de gran tamaño y consumen una gran cantidad de recursos computacionales.

Es por esta razón que **la resolución de estos sistemas es quizás el tema más importante del cálculo numérico**.

En esta unidad nos concentraremos en la resolución de n ecuaciones algebraicas y lineales con n incógnitas.

Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

Los sistemas de ecuaciones tienen la forma de:

$$
\begin{gathered}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = b_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n = b_n
\end{gathered}
$$

En notación matricial:

$$
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{A} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b}
$$

Donde **b** es el vector de entrada del sistema y **x** es el vector de respuesta

Unicidad de la solución

Teorema:

Sea A una matriz de coeficientes cuadrada. La matriz se dice "invertible" o "no singular" si se cumplen las siguientes seis condiciones.

1) La inversa de A existe

2) No existe un vector no nulo x tal que $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = 0$

3) Las columnas de A son linealmente independientes

4) Las filas de A son linealmente independientes

5) El determinante de A es no nulo

6) Dado un vector $\mathbf{b}$, existe un único vecto x tal que $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Unicidad de la solución

Si A es invertible, la solución se puede obtener premultiplicando ambos lados de la ecuación por la inversa de A.

$$A^{-1}A\cdot x = A^{-1}b$$
$$Ix = A^{-1}b$$

Esta solución resuelve el problema, en teoría, sin embargo el método de solución (calcular la inversa de A y multiplicarla por b) es usualmente una mala idea. **Es más eficiente resolver la ecuación en forma directa**. Para problemas de gran tamaño, el ahorro de espacio y cálculo se vuelve crucial y evitar el uso de invertir una matriz resulta en ahorros espectaculares.

Número de condición de una matriz

Ya hemos establecido que si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, el sistema tiene solución única.

¿Qué sucede si el determinante da un número muy pequeño, cercano a 0?

Número de condición de una matriz

Para determinar que tan próxima está la matriz a la singularidad, se utiliza el **número de condición**.

Formalmente el número de condición se define como:

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Si el número es cercano a 1, la matriz está bien condicionada y si crece hacia infinito significa que la matriz es singular.

Los resultados obtenidos a través de **matrices mal condicionadas no deben ser considerados**, ya que **los pequeños errores** numéricos que aparecen por aritmética de punto flotante **se amplifican** en la solución.

Métodos directos vs iterativos

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Existen dos clases de métodos para resolver un SEL, los **directos** y los **iterativos**.

En los directos, **se transforman las ecuaciones** en otras equivalentes, **más simples de resolver**.

En los iterativos se inicia con una **suposición inicial** de la solución **x** y se repite un **proceso iterativo** hasta alcanzar la **convergencia**. Estos métodos son menos eficientes pero son más efectivos si los problemas son de gran tamaño.

Métodos directos

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Las transformaciones se realizan mediante **tres operaciones elementales** que no alteran la solución pero sí al determinante de la matriz.

1) Intercambiar dos ecuaciones (cambia el signo del determinante)

2) Multiplicar una fila por una constante no nula (multiplica el determinante por la misma constante)

3) Multiplicar una fila por una constante no nula y restarla de otra fila (no altera el determinante)

Matrices triangulares

Matriz triangular superior U (upper):

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior L (lower):

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Matrices triangulares

Las matrices triangulares son fundamentales en álgebra lineal porque simplifican los cálculos.

$$L \cdot x = c$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} L_{11}x_1 \quad c_1 \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 = c_2 \\ L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + L_{33}x_3 \quad c_3 \end{array}$$

Si se comienza por la primer ecuación se pueden ir resolviendo **“progresivamente”** todas las ecuaciones, de a una por vez. Este esquema se llama **sustitución hacia adelante** o **progresiva.** De igual manera se puede resolver un sistema Ux=c de forma **regresiva,** atribuyéndose el nombre de **sustitución regresiva** o **hacia atrás** a esta práctica.

Eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss, es el más común para la resolución de SEL.

El método consta de dos fases, la **fase de eliminación** y la **fase de resolución**.

En la fase de eliminación se busca **transformar el problema en uno de la forma Ux = c**

En la fase de resolución se aplica la **sustitución regresiva**.

Eliminación de Gauss

Fase de eliminación

Se utiliza la tercer operación elemental. La ecuación que se multiplica y se resta se denomina ecuación pivote.

Se busca ir transformando la matriz **A** en una matriz triangular superior **U** equivalente.

<u>Procedimiento:</u>

1) Se elige la ecuación de pivote, fila i.

2) Para cada ecuación por debajo de la pivote, se multiplica la ecuación pivote por (a_{ji}/a_{ii}), siendo j la ecuación a eliminar.

3) Se resta cada ecuación j con la ecuación pivote, ya multiplicada, para eliminar el primer término no nulo i de la ecuación j.

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{4 & -2 & 1 & 11} \\ -2 & 4 & -2 & -16 \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{array}\right] \leftarrow \text{pivote}$$

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{4 & -2 & 1 & 11} \\ -2 & 4 & -2 & -16 \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4*(-2/4) & -2*(-2/4) & 1*(-2/4) & 11*(-2/4) \\ -2 & 4 & -2 & -16 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3/2 & -21/2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4*(1/4) & -2*(1/4) & 1*(1/4) & 11*(1/4) \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3/2 & 15/4 & 57/4 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{11} \\ -2 & 4 & -2 & -16 \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ \boxed{0} & 3 & -3/2 & -21/2 \\ \boxed{0} & -3/2 & 15/4 & 57/4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4*(-2/4) & -2*(-2/4) & 1*(-2/4) & 11*(-2/4) \\ -2 & 4 & -2 & -16 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3/2 & -21/2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4*(1/4) & -2*(1/4) & 1*(1/4) & 11*(1/4) \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3/2 & 15/4 & 57/4 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -3/2 & -21/2 \\ 0 & -3/2 & 15/4 & 57/4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3*(-1/2) & -3/2*(-1/2) & -21/2*(-1/2) \\ 0 & -3/2 & 15/4 & 57/4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -3/2 & -21/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss

Fase de solución

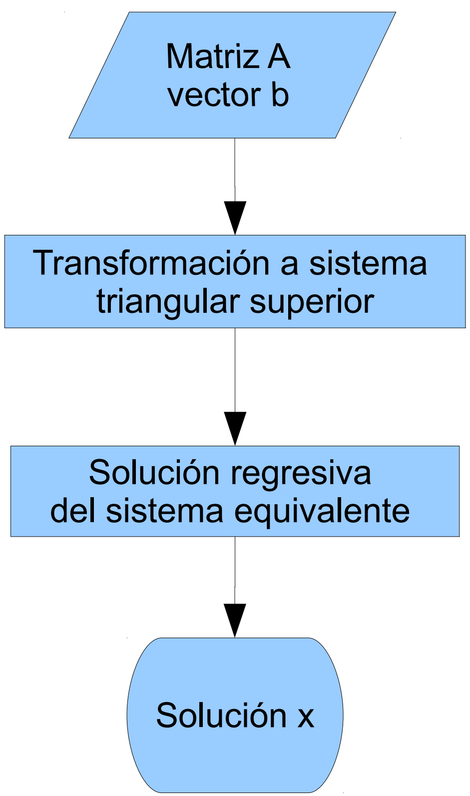
Se utiliza la sustitución regresiva. Se empieza resolviendo la última ecuación y se reemplaza el resultado en la anterior. El proceso se repite hasta llegar a la primera ecuación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} x_3 = 9/3 = 3 \\ 3x_2 - 1{,}5(3) = -10.5 \rightarrow x_2 = -2 \\ 4x_1 - 2(-2) + (3) = 11 \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

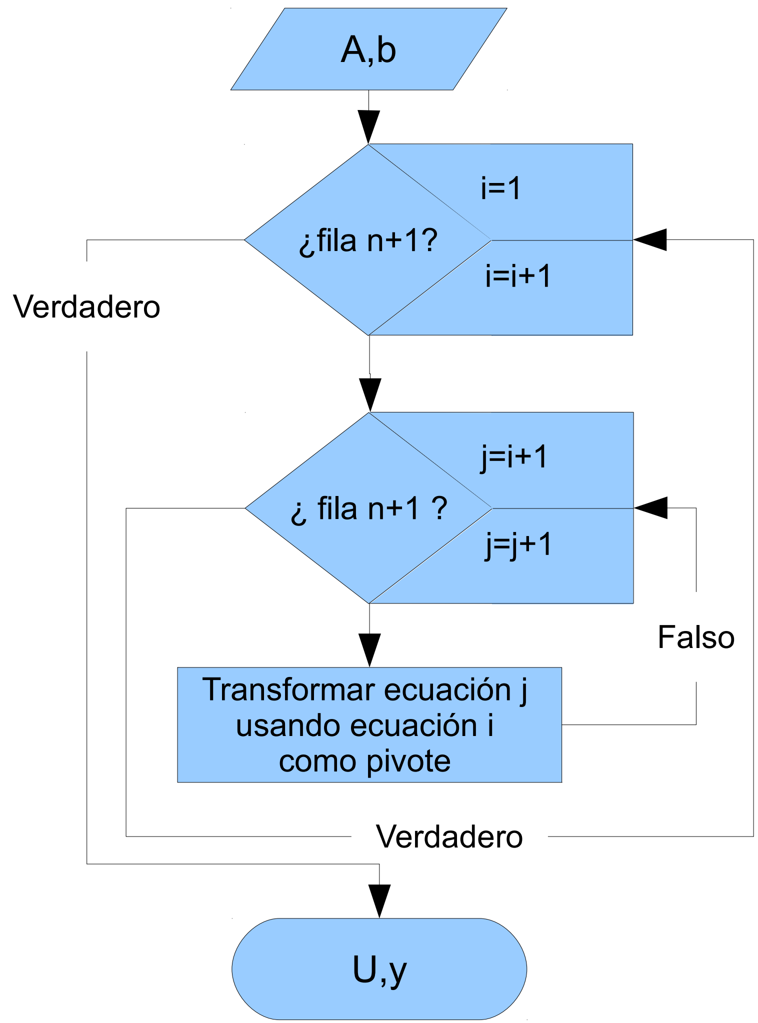
Eliminación de Gauss

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

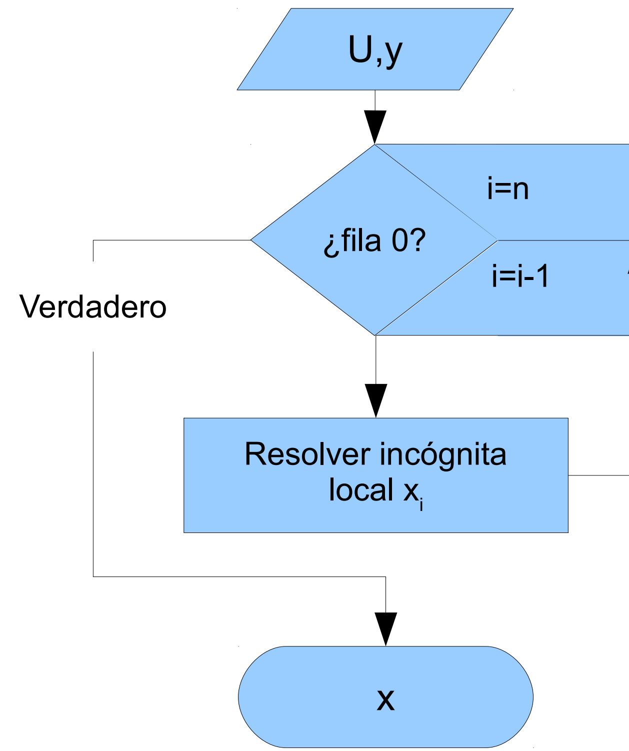
Algoritmo



Transformación a sistema triangular superior



Solución regresiva



Eliminación de Gauss

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Generalización de la fase de eliminación

Supongamos que se han transformado las primeras k líneas. La línea pivote es la k-ésima. El primer elemento no nulo es el A_{kk}. La fila debajo del pivote es la i-ésima. Se busca eliminar el elemento A_{ik}.

El multiplicador para la fila i-ésima será: $\lambda_i = A_{ik} / A_{kk}$

La transformación será: $A_{ij} \leftarrow (A_{ij} - \lambda A_{kj}),\, b_i \leftarrow (b_i - \lambda b_k)$

Generalización de la fase de solución

Supongamos que se han resuelto las últimas k-1 líneas. La línea a resolver es la k-ésima.

$$A_{kk} x_k + A_{k,k+1} x_{k+1} + \ldots + A_{kn} x_n = b_k \rightarrow X_k = \frac{1}{A_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} A_{kj} x_j \right)$$

Eliminación de Gauss

<u>Reordenamiento</u>

Para que la eliminación de Gauss funcione, se busca que la matriz sea predominantemente diagonal. Es decir que los mayores valores relativos de las constantes en cada fila estén en la columna diagonal.

Si se encuentran valores relativos máximos alejados de la diagonal, o hay ceros en la diagonal, es conveniente cambia el orden de las filas (pivotear).

Solución de SEL con Matrices de términos independientes

Se busca resolver un conjunto de **m** sistemas de ecuaciones lineales, dado por una matriz de términos independientes.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Cada SEL está formado por un determinado vector independiente y su vector de incógnitas asociado.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

Solución de SEL con matrices de términos independientes

Si se resuelve por eliminación de Gauss, durante la fase de **eliminación** se deben **considerar todas las columnas** de B. En la fase de **solución** se trabaja con **cada vector** independiente **por separado**.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

para la fila pivote p y la i-ésima fila resulta:

$$\lambda_p = \frac{A_{pi}}{A_{pp}} \rightarrow A_{ik} = A_{ik} - \lambda_p A_{pk} \wedge b_{ik} = b_{ik} - \lambda_p b_{pk}, \text{con } k = p, \ldots, n$$

Solución de SEL con matrices de términos independientes

Al obtenerse la matriz triangular la solución es por substitución hacia atrás, con la salvedad de que se debe resolver cada SEL por separado.

$$\begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} & \dots & A''_{1n} \\ 0 & A''_{22} & \dots & A''_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & A''_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

Para el caso de transformaciones mediante matrices **A** ya conocidas, resulta **más eficiente** utilizar la **descomposición LU**, ya que se realiza la **descomposición una única vez** y luego simplemente se resuelven los sistemas triangulares para cada vector independiente.

Es decir, se considera el SEL A X = B , como A = LU entonces L(UX) = B. Llamando Y = UX quedan dos sistemas triangulares. L Y = B , U X = Y. Donde Y,X,B son matrices de n x m.

Solución de SEL con matrices de términos independientes

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 22 \\ 36 & -18 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Primera eliminación

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ -4 & 6 & -4 & 36 & -18 \\ 1 & -4 & 6 & 6 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2/3 \\ \lambda_2 = 1/6 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & 10/3 & -10/3 & 80/3 & -10/3 \\ 0 & -10/3 & 35/6 & 25/3 & 10/3 \end{array}\right]$$

Segunda eliminación

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & 10/3 & -10/3 & 80/3 & -10/3 \\ 0 & -10/3 & 35/6 & 25/3 & 10/3 \end{array}\right] \rightarrow \lambda_3 = 1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & 10/3 & -10/3 & 80/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 & 35 & 0 \end{array}\right]$$

Solución de SEL con matrices de términos independientes

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Fase de solución

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 0 & 10/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 22 \\ 80/3 & -10/3 \\ 35 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 0 & 10/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 80/3 \\ 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{11} = 10 \\ x_{21} = 22 \\ x_{31} = 14 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 0 & 10/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -10/3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{12} = 3 \\ x_{22} = -1 \\ x_{32} = 0 \end{matrix}$$

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Inversión de matrices

Siempre que sea posible se debe evitar invertir una matriz debido al alto costo computacional involucrado.

De ser necesaria, la forma más económica de resolverla es mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ & & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = I \rightarrow (A^{-1} A) \cdot X = (A^{-1} I) \rightarrow X = A^{-1}$$

Descomposición LU

Toda matriz cuadrada se puede descomponer en el producto de una matriz L por una matriz U de modo que $A = L\,U$

El proceso por el cual se determinan las matrices L y U se llama **descomposición o factorización LU**.

La descomposición necesita algunas **restricciones adicionales** para ser única. Estas restricciones producen métodos de descomposición LU distintos, por ejemplo el de **Doolittle**, el de **Crout** y el de **Choleski**.

Una vez factorizada la matriz, la resolución es sencilla.

$A \cdot x = (LU) \cdot x = c \rightarrow$ Definiendo el vector y como $y = U \cdot x$

Reemplazando en la ecuación original queda $L y = c$

Descomposición de Doolittle

Se considera que la matriz L tiene 1 en la diagonal.

$$A = L\,U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{11} L_{21} & U_{12} L_{21} + U_{22} & U_{13} L_{21} + U_{23} \\ U_{11} L_{31} & U_{12} L_{31} + U_{22} L_{32} & U_{13} L_{31} + U_{23} L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Descomposición de Doolittle

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se aplica la eliminación de Gauss en ambas matrices para encontrar la matriz U.

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} - L_{21} A_{11} & A_{22} - L_{21} A_{12} & A_{23} - L_{21} A_{13} \\ A_{31} - L_{31} A_{11} & A_{32} - L_{31} A_{12} & A_{33} - L_{31} A_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ \boxed{0} & U_{22} & U_{23} \\ \boxed{0} & U_{22} L_{32} & U_{23} L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = L_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

$$\lambda_3 = L_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}}$$

Cada lambda corresponde a los elementos de la matriz L!

Descomposición de Doolittle

Se aplica la eliminación de Gauss nuevamente.

$$A''=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22}' & A_{23}' \\ 0 & A_{32}'-L_{32}A_{22}' & A_{33}'-L_{32}A_{23}' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=L_{32}=\frac{A_{32}'}{A_{22}'}$$

Descomposición de Doolittle

Por solución regresiva se encuentran los valores de U.

Se pueden guardar las constantes de multiplicación en los ceros de la matriz U para aprovechar el espacio.

$$A'' = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21} & U_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

Descomposición de Doolittle

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -16 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 17 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{11}L_{21} & U_{12}L_{21} + U_{22} & U_{13}L_{21} + U_{23} \\ U_{11}L_{31} & U_{12}L_{31} + U_{22}L_{32} & U_{13}L_{31} + U_{23}L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Descomposición de Doolittle

Ejemplo:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2-L_{21}(4) & 4-L_{21}(-2) & -2-L_{21}(1) \\ 1-L_{31}(4) & -2-L_{31}(-2) & 4-L_{31}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{22}L_{32} & U_{23}L_{32}+U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = L_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{2}{4}$$

$$\lambda_3 = L_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}} = \frac{1}{4}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & 3{,}75 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Doolittle

Ejemplo

$$A''=\begin{bmatrix}4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1{,}5 \\ 0 & -1{,}5-L_{32}3 & 3{,}75-L_{32}(-1{,}5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=L_{32}=\frac{A_{32}{}'}{A_{22}{}'}=-\frac{1{,}5}{3}$$

$$A''=\begin{bmatrix}4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=U$$

Descomposición de Doolittle

Finalmente

$$U=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Choleski

Se considera que la matriz A es simétrica y definida positiva.

$$A = L\,L^T = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Choleski

Como las matrices son simétricas, igualando las matrices elemento a elemento y considerando solamente un lado de la diagonal, se pueden calcular directamente los coeficientes de la matriz L con una solución progresiva.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^2 & \cdots & \cdots \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \cdots \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Métodos iterativos

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Los **métodos directos** logran resolver el SEL en una **cantidad finita de pasos**. En contraposición, los **métodos iterativos** comienzan con una solución de partida e iteran hasta que se encuentra la **convergencia**. Por lo tanto, **son más lentos** que los métodos directos. Sin embargo, poseen las siguientes ventajas:

- Al ser métodos que van corrigiendo la solución, **pueden reducir los errores** asociados a la aritmética de punto flontante.
- Pueden almacenar solamente los valores no nulos de las matrices, con lo cual **permiten trabajar con SEL de mayor tamaño** respecto a los métodos directos.

Soluciones iterativas de SEL

Queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

En cada ecuación podemos despejar una de las incógnitas

$$\begin{aligned} x &= (7 + y - z)/4 \\ y &= (21 + 4x + z)/8 \\ z &= (15 + 2x - y)/5 \end{aligned}$$

Se propone la siguiente fórmula recursiva

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (7 + y_k - z_K)/4 \\ y_{k+1} &= (21 + 4x_k + z_k)/8 \\ z_{k+1} &= (15 + 2x_k - y_k)/5 \end{aligned}$$

Se propone una terna de valores de partida y se utiliza la fórmula recursiva para obtener una aproximación mejor. El esquema se repite hasta alcanzar una tolerancia dada.
Éste es el **método de Jacobi**.

Si aprovechamos la actualización de las variables se puede acelerar el proceso

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (7 + y_k - z_K)/4 \\ y_{k+1} &= (21 + 4\underline{x_{k+1}} + z_k)/8 \\ z_{k+1} &= (15 + 2\underline{x_{k+1}} - \underline{y_{k+1}})/5 \end{aligned}$$

El proceso es análogo al método de Jacobi.
Éste es el **método de Gauss-Seidel**.

Soluciones iterativas de SEL

Volvamos a ver los métodos pero en forma matricial

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

La matriz de coeficientes se puede escribir como la suma de dos matrices (Diagonal y el Resto)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$$

Reemplazamos en la ecuación original y obtenemos la fórmula recursiva

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}_k}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k}$$

Soluciones iterativas de SEL

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Comparemos la ecuación matricial vs las ecuaciones originales

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 21/8 \\ 15/5 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -4/8 & 0 & -1/8 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k}$$

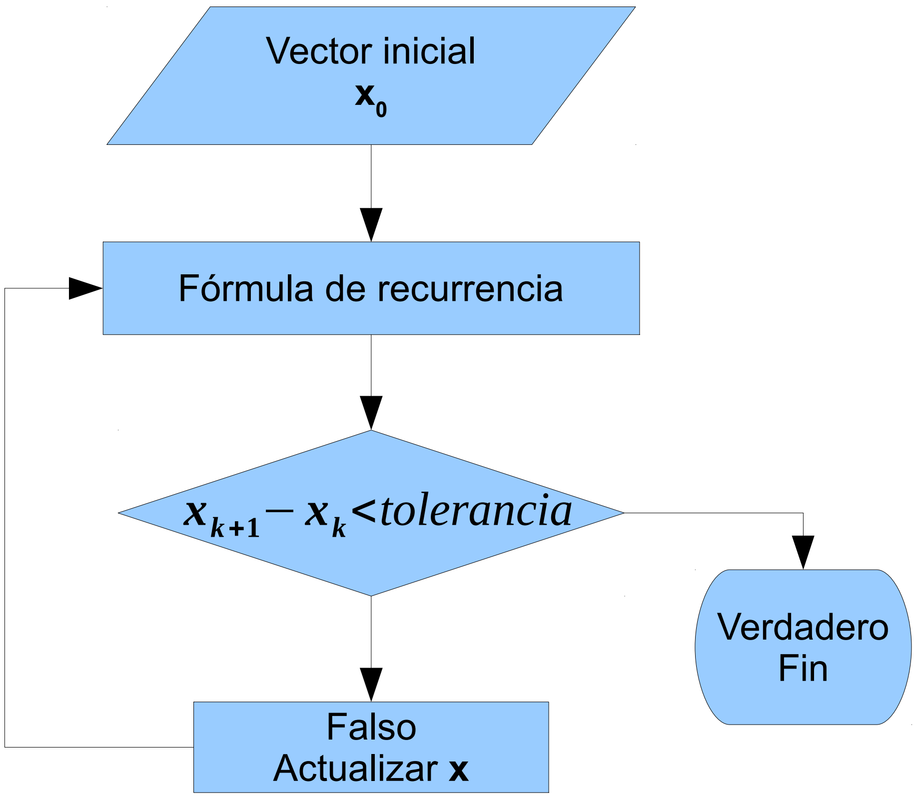
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (7 + y_k - z_K)/4 \\ y_{k+1} &= (21 + 4x_k + z_k)/8 \\ z_{k+1} &= (15 + 2x_k - y_k)/5 \end{aligned}$$

Para Gauss-Seidel, se separa la matriz T en una triangular superior más una triangular inferior

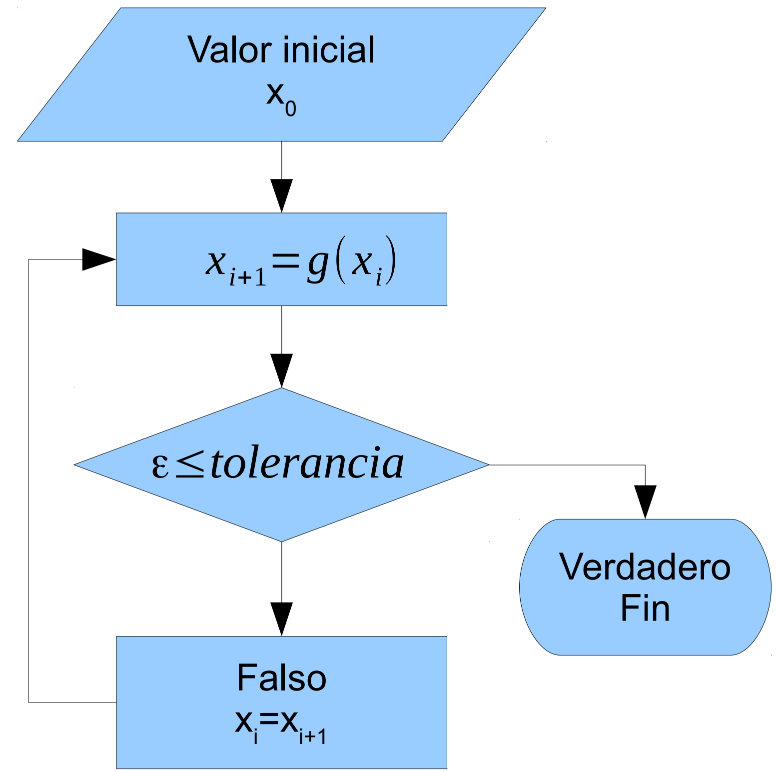
$$\boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}^k \rightarrow \boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{T}_L \cdot \boldsymbol{x}^{k+1} + \boldsymbol{T}_U \cdot \boldsymbol{x}^k$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 21/8 \\ 15/5 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/8 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k+1} - \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k}$$

Comparación con algoritmo iterativo de búsqueda de raíces



Método iterativo para solución de SEL



Método abierto de búsqueda de raíces

Ejemplo con Jacobi

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 21/8 \\ 15/5 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -4/8 & 0 & -1/8 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k}$$

Iteración	x	y	z
0	1,00000000	2,00000000	2,00000000
1	1,75000000	3,37500000	3,00000000
2	1,84375000	3,87500000	3,02500000
3	1,96250000	3,92500000	2,96250000
4	1,99062500	3,97656250	3,00000000
...			
15	1,99999993	3,99999985	2,99999993
...			
19	2,00000000	4,00000000	3,00000000

Ejemplo con Gauss Seidel

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 21/8 \\ 15/5 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/8 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k+1} - \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{k}$$

Iteración	x	y	z
0	1,00000000	2,00000000	2,00000000
1	1,75000000	3,75000000	2,95000000
2	1,95000000	3,96875000	2,98625000
3	1,99562500	3,99609375	2,99903125
4	1,99926563	3,99951172	2,99980391
5	1,99992695	3,99993896	2,99998299
6	1,99998899	3,99999237	2,99999712
7	1,99999881	3,99999905	2,99999972
8	1,99999983	3,99999988	2,99999996
9	1,99999998	3,99999999	3,00000000
10	2,00000000	4,00000000	3,00000000

Programa Jacobi

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

```
function [x]=jacobi_mat(A,b,x0,delta,maxiter)
%Solucion de sistemas lineales Ax=b, donde A es una matriz estrictamente diagonal
%dominante
%Entradas:
%A, matriz de NxN no singular
%b, vector de Nx1
%x0, solucion inicial
%delta, tolerancia del error
%maxiter, numero maximo de iteraciones
%Salidas:
%x, vector de Nx1
%Referencia: Mathews y Fink "Metodos Numericos con Matlab"

N=size(b,1);
k=0;
err=1;
x=zeros(N,1);

D=eye(N);
Dinv=D;
for i=1:N
    D(i,i)=A(i,i);
    Dinv(i,i)=1/A(i,i);
end
R=A-D;
T=-Dinv*R;
c=Dinv*b;

while (err>delta) && (k<maxiter)
    x=T*x0+c;
    err=abs(norm((x-x0),1));
    x0=x;
    k=k+1;
end
end
```

Bloque de inicialización

Recursión

Programa Gauss Seidel

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

```
function [x]=gauss_seidel(A,b,x0,delta,maxiter)
%Solucion de sistemas lineales Ax=b, donde A es una matriz estrictamente diagonal
%dominante
%Entradas:
%A, matriz de NxN no singular
%b, vector de Nx1
%x0, solucion inicial
%delta, tolerancia del error
%maxiter, numero maximo de iteraciones
%Salidas:
%x, vector de Nx1

N=size(b,1);
k=0;
err=1;
x=zeros(N,1);

while (err>delta) && (k<maxiter)
    x(1,1)=( b(1,1)-A(1,2:N)*x0(2:N,1))/A(1,1);
    for j=2:N-1
        x(j,1)=( b(j,1)-A(j,1:j-1)*x(1:j-1,1)-A(j,j+1:N)*x0(j+1:N,1))/A(j,j);
    end
    x(N,1)=( b(N,1)-A(N,1:N-1)*x(1:N-1,1))/A(N,N);

    err=abs(norm((x-x0),1));
    x0=x;
    k=k+1;
end
end
```

Recursión

Comandos en GNU Octave

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

cond(A)	Número de condición de la matriz
x=A\b	Solución automática de SEL
[L, U] = lu (A)	descomposición LU
L = chol (A)	descomposición de Cholesky

The selection tree for how the linear equation is solved or a matrix inverse is formed is given by:

1) If the matrix is upper or lower triangular sparse use a forward or backward substitution.
2) If the matrix is square, Hermitian with a real positive diagonal, attempt Cholesky factorization.
3) If the Cholesky factorization failed or the matrix is not Hermitian with a real positive diagonal, and the matrix is square, factorize using the LAPACK xGETRF function.
4) If the matrix is not square, or any of the previous solvers flags a singular or near singular matrix, find a least squares solution