UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

Introducción a la matemática

Unidad 4 c

2016

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

Aplicaciones y modelado de funciones exponenciales y logarítmicas

Interés compuesto

El **interés compuesto** se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde $A(t) =$ cantidad después de t años

$P =$ principal

$r =$ tasa de interés por año

$n =$ número de veces que el interés de compone por año

$t =$ número de años

Ejemplo 9 Cálculo del interés compuesto

Una suma de $1000 se invierte a una tasa de interés de 12% anual. Calcule las cantidades en la cuenta después de tres años si el interés se compone anualmente, cada medio año, por trimestre, mensualmente o diario.

Solución Se usa la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$, y $t = 3$.

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semianual	2	$1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diaria	365	$1000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

Interés compuesto en forma continua

El **interés compuesto en forma continua** se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

donde $A(t) =$ cantidad después de t años

$P =$ principal

$r =$ tasa de interés por año

$t =$ número de años

Ejemplo 10 Calcular el interés compuesto de manera continua

Calcule la cantidad después de tres años si se invierten \$1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizados de forma continua.

Solución Se usa la fórmula del interés capitalizable en forma continua con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = \$1433.33$$

Modelado (Exponenciales)

Modelo de crecimiento exponencial

Una población que experimenta **crecimiento exponencial** crece según el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ = población en el tiempo t

n_0 = tamaño inicial de la población

r = tasa relativa de crecimiento (expresada como una proporción de la población)

t = tiempo

Ejemplo 1 Predecir el tamaño de la población

La cuenta inicial de bacterias en un cultivo es 500. Más tarde un biólogo realiza una cuenta muestral de bacterias en el cultivo y encuentra que la tasa relativa de crecimiento es 40% por hora.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

b) ¿Cuál es la cuenta estimada después de 10 horas?

c) Trace la gráfica de la función $n(t)$.

Solución

a) Se usa el modelo de crecimiento exponencial con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

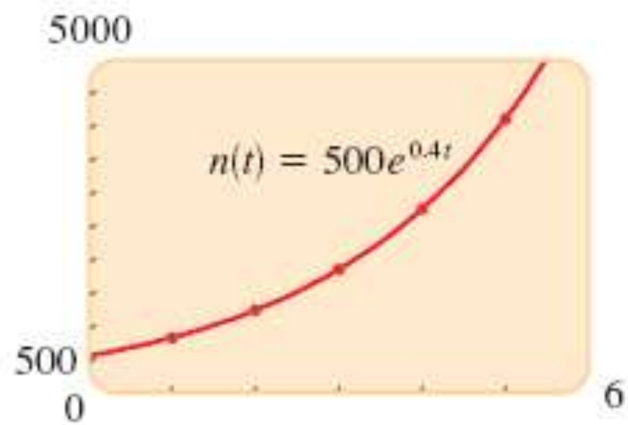
$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde t se mide en horas.

b) Por medio de la función del inciso a), se encuentra que la cuenta de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^{4} \approx 27\,300$$

c) La gráfica se muestra en la figura 1.



Modelo de decaimiento radiactivo

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media h, entonces la masa restante en el tiempo t se modela mediante la función

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

Ejemplo 6 Decaimiento radiactivo

El polonio 210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

a) Encuentre una función que modele la cantidad de la muestra que queda en el tiempo t.

b) Calcule la masa que queda después de un año.

c) ¿Cuánto tiempo tarda la muestra en desintegrarse a una masa de 200 mg?

d) Dibuje una gráfica de la masa de la muestra como una función del tiempo.

Solución

a) Usando el modelo para el decaimiento radiactivo con $m_0 = 300$ y $r = (\ln 2/140) \approx 0.00495$, se tiene

$$m(t) = 300e^{-0.00495t}$$

b) Se usa la función hallada en el inciso a) con $t = 365$ (un año).

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Así, aproximadamente 49 mg de ^{210}Po permanecen después de un año.

c) Use la función determinada en el inciso a) con $m(t) = 200$ y despeje t de la ecuación resultante.

$$300e^{-0.00495t} = 200 \qquad m(t) = m_0 e^{-rt}$$

$$e^{-0.00495t} = \tfrac{2}{3} \qquad \text{Divida entre 300}$$

$$\ln e^{-0.00495t} = \ln \tfrac{2}{3} \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$

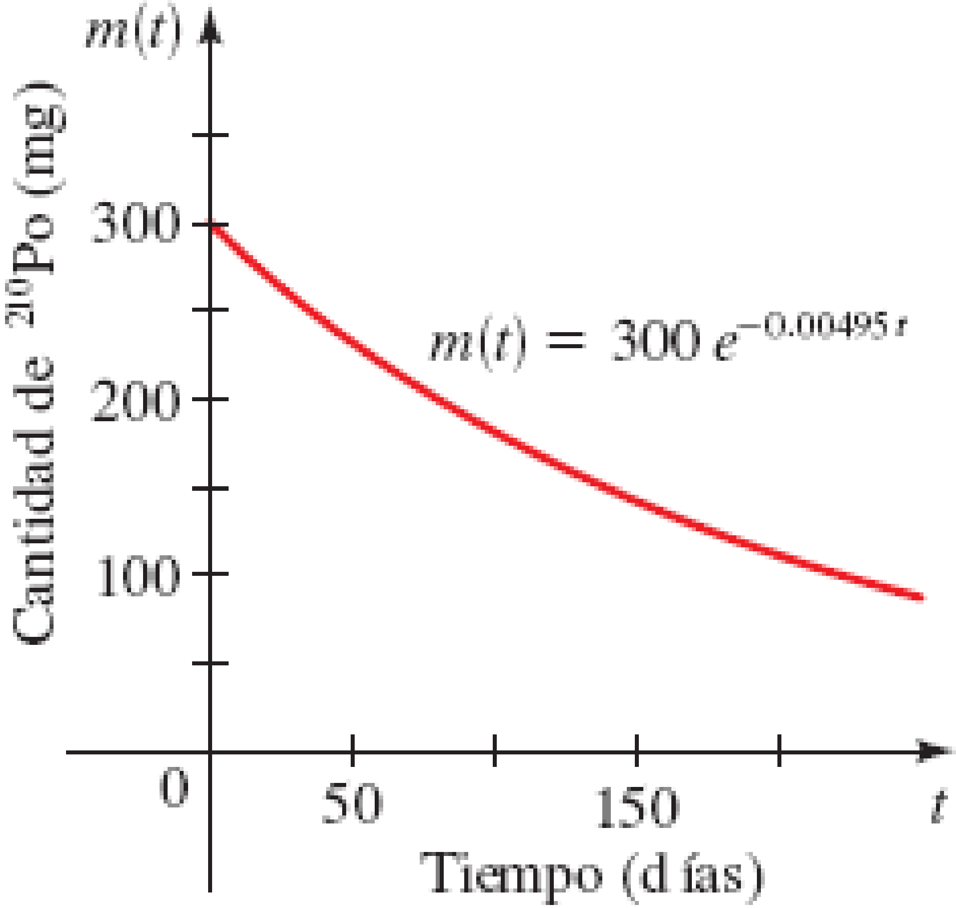
$$-0.00495t = \ln \tfrac{2}{3} \qquad \text{Propiedad del ln}$$

$$t = -\frac{\ln \frac{2}{3}}{0.00495} \qquad \text{Divida entre } -0.00495$$

$$t \approx 81.9 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

El tiempo requerido para que la muestra disminuya a 200 mg es de alrededor de 82 días.

(d) En la figura 4 se muestra una gráfica de la función $m(t) = 300e^{-0.00495t}$. ■


m(t)
Cantidad de 20Po (mg)
300
200
100
0
50
150
t
Tiempo (d ías)
m(t) = 300 e^{−0.00495 t}

Calcular
Ejercicio 16 – página 380

16. Torio radiactivo La masa $m(t)$ restante después de t días de una muestra de 40 g de torio 234 está dada por

$$m(t) = 40e^{-0.0277t}$$

a) ¿Después de 60 días cuál es la cantidad de muestra restante?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que sólo queden 10 g de la muestra?

c) Calcule la vida media del torio 234.

Ley del enfriamiento de Newton

Si D_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y sus alrededores, y si sus alrededores tienen temperatura T_s, entonces la temperatura en el tiempo t se modela mediante la función

$$T(t) = T_s + D_0 e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de objeto.

Ejemplo 7 Ley del enfriamiento de Newton

Una taza de café tiene una temperatura de 200°F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70 °F. Después de 10 min la temperatura del café es 150°F.

a) Encuentre una función que modele la temperatura del café en el instante t.

b) Calcule la temperatura del café después de 15 min.

c) ¿En qué momento el café se habrá enfriado a 100°F?

d) Ilustre mediante el trazo de una gráfica la función de temperatura.

Solución

a) La temperatura del ambiente es $T_s = 70\,°F$, y la diferencia de temperatura inicial es

$$D_0 = 200 - 70 = 130\,°F$$

Por lo tanto, por la ley del enfriamiento de Newton, la temperatura después de t minutos se modela mediante la función

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Se necesita hallar la constante k relacionada con esta taza de café. Para hacer esto, se usa el hecho de que cuando $t = 10$, la temperatura es $T(10) = 150$.

Por lo tanto, se tiene

$$70 + 130e^{-10k} = 150 \qquad T_s + D_0e^{-kt} = T(t)$$

$$130e^{-10k} = 80 \qquad \text{Reste 70}$$

$$e^{-10k} = \tfrac{8}{13} \qquad \text{Divida entre 130}$$

$$-10k = \ln \tfrac{8}{13} \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$

$$k = -\tfrac{1}{10} \ln \tfrac{8}{13} \qquad \text{Divida entre } -10$$

$$k \approx 0.04855 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

Al sustituir este valor de k en la expresión para $T(t)$, se obtiene

$$T(t) = 70 + 130e^{-0.04855t}$$

b) Se usa la función hallada en el inciso a) con $t = 15$.

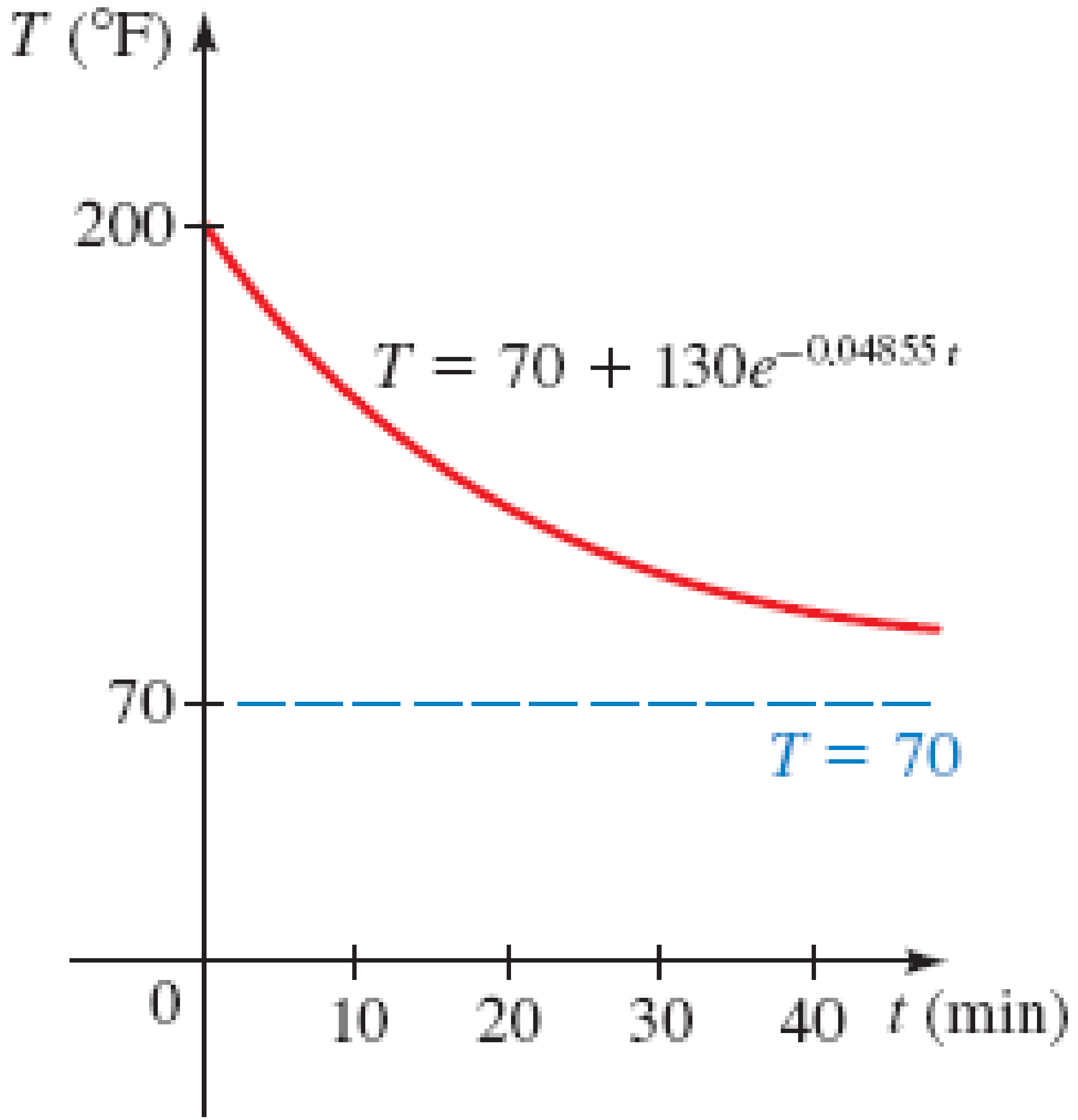
$$T(15) = 70 + 130e^{-0.04855(15)} \approx 133\,°\mathrm{F}$$

c) Se usa la función encontrada en el inciso a) con $T(t) = 100$ y de la ecuación resultante se despeja t.

$$\begin{aligned}
70 + 130e^{-0.04855t} &= 100 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t) \\
130e^{-0.04855t} &= 30 && \text{Reste 70} \\
e^{-0.04855t} &= \tfrac{3}{13} && \text{Divida entre 130} \\
-0.04855t &= \ln \tfrac{3}{13} && \text{Tome el ln de cada lado} \\
t &= \frac{\ln \frac{3}{13}}{-0.04855} && \text{Divida entre } -0.04855 \\
t &\approx 30.2 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}$$

El café se habrá enfriado a 100°F después de casi media hora.

d) La gráfica de la función de temperatura se bosqueja en la figura 5. Observe que la recta $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?) ■



Calcular
Ejercicio 25 – página 381

25. Enfriamiento de un pavo Se saca del horno un pavo asado cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca en una mesa en una habitación donde la temperatura es de 75°F.

a) Si la temperatura del pavo es de 150°F después de media hora, ¿cuál es su temperatura después de 45 min?

b) ¿En cuánto tiempo el pavo se enfría a 100°F?

Modelado (Logarítmicas)

LA ESCALA DE pH Los químicos medían la acidez de una disolución dando su concentración de ion hidrógeno hasta que Sorensen, en 1909, propuso una medida más conveniente. Él definió

$$\boxed{pH = -\log[H^+]}$$

donde $[H^+]$ es la concentración de los iones hidrógeno medida en moles por litro (M). Él hizo esto para evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo,

$$\text{si} \qquad [H^+] = 10^{-4}\,\text{M}, \qquad \text{entonces} \qquad pH = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las disoluciones con un pH de 7 se definen como *neutras*, aquellas con $pH < 7$ son *ácidas* y las que tienen $pH > 7$ son *básicas*. Observe que cuando se incrementa el pH en una unidad, $[H^+]$ disminuye por un factor de 10.

pH para algunas sustancias comunes

Sustancia	pH
Leche de magnesia	10.5
Agua de mar	8.0–8.4
Sangre humana	7.3–7.5
Galletas	7.0–8.5
Sémola de maíz	6.9–7.9
Leche de vaca	6.4–6.8
Espinacas	5.1–5.7
Tomates	4.1–4.4
Naranjas	3.0–4.0
Manzanas	2.9–3.3
Limas	1.3–2.0
Ácido de baterías	1.0

Ejemplo 8 Escala de pH y concentración de ion hidrógeno

a) Se midió la concentración de ion hidrógeno de una muestra de sangre humana y se encontró que es $[H^+] = 3.16 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

b) La lluvia más ácida medida alguna vez ocurrió en Escocia en 1974; su pH fue 2.4. Determine la concentración de ion hidrógeno.

Solución

a) Con una calculadora se obtiene

$$\text{pH} = -\log[H^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

Puesto que es mayor que 7, la sangre es básica.

b) Para hallar la concentración de ion hidrógeno, se necesita despejar $[H^+]$ en la ecuación logarítmica

$$\log[H^+] = -\text{pH}$$

Por lo tanto, se escribe en forma exponencial.

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}}$$

En este caso, pH $= 2.4$, por lo tanto

$$[H^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\ \text{M}$$

■

Calcular
Ejercicio 28 – página 381

28. Hallar el pH Una muestra desconocida tiene una concentración de ion hidrógeno de $[H^+] = 3.1 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

LA ESCALA RICHTER En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como

$$\boxed{M = \log \frac{I}{S}}$$

donde I es la intensidad del terremoto (medida por la amplitud de una lectura de sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto) y S es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es 1 micra $= 10^{-4}$ cm). La magnitud del terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Terremotos más grandes

Lugar	Fecha	Magnitud
Chile	1960	9.5
Alaska	1964	9.2
Alaska	1957	9.1
Kamchatka	1952	9.0
Sumatra	2004	9.0
Ecuador	1906	8.8
Alaska	1965	8.7
Tíbet	1950	8.6
Kamchatka	1923	8.5
Indonesia	1938	8.5
Islas Kuril	1963	8.5

Ejemplo 9 Magnitud de terremotos

El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador y su intensidad fue cuatro veces mayor. ¿Cuál fue la magnitud del terremoto de Colombia y Ecuador en la escala Richter?

Solución Si I es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces de la definición de magnitud se tiene

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto de Colombia y Ecuador fue $4I$, de modo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$ ■

Calcular
Ejercicio 34 – página 381

34. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala Richter. Al mismo tiempo en Japón un terremoto con magnitud 4.9 causó sólo daños menores. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de San Francisco que el de Japón?

LA ESCALA DE DECIBELES El oído es sensible a una variedad extremadamente amplia de intensidades de sonido. Se toma como intensidad de referencia $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de audición). La sensación psicológica de sonoridad varía con el logaritmo de la intensidad (la ley de Weber-Fechner) y, por lo tanto, el **nivel de intensidad** B, medido en decibeles (dB), se define como

$$\boxed{B = 10 \log \frac{I}{I_0}}$$

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es

$$B = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Los **niveles de intensidad de sonidos** que es posible escuchar varían desde muy fuertes hasta muy suaves. A continuación se dan algunos ejemplos de los niveles de decibeles de sonidos escuchados comúnmente.

Fuente de sonido	B (dB)
Despegue de un avión	140
Martillo neumático	130
Concierto de rock	120
Tren subterráneo	100
Tránsito intenso	80
Tránsito ordinario	70
Conversación normal	50
Susurro	30
Murmullo de hojas	10–20
Umbral de audición	0

Ejemplo 11 Intensidad sonora del despegue de un avión

Encuentre el nivel de intensidad en decibeles de una turbina de avión durante el despegue si la intensidad se mide a 100 W/m^2.

Solución De la definición de nivel de intensidad se puede observar que

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad es 140 dB. ■

La tabla del margen lista los niveles de intensidad de decibeles para algunos sonidos comunes que varían del umbral de la audición humana al despegue de avión del ejemplo 11. El umbral de dolor es más o menos 120 dB.

Calcular
Ejercicio 38 – página 382

38. Ruido de tránsito La intensidad del sonido del tránsito en una intersección ocupada se midió en 2.0×10^{-5} W/m^2. Determine el nivel de intensidad en decibeles.


Recreo