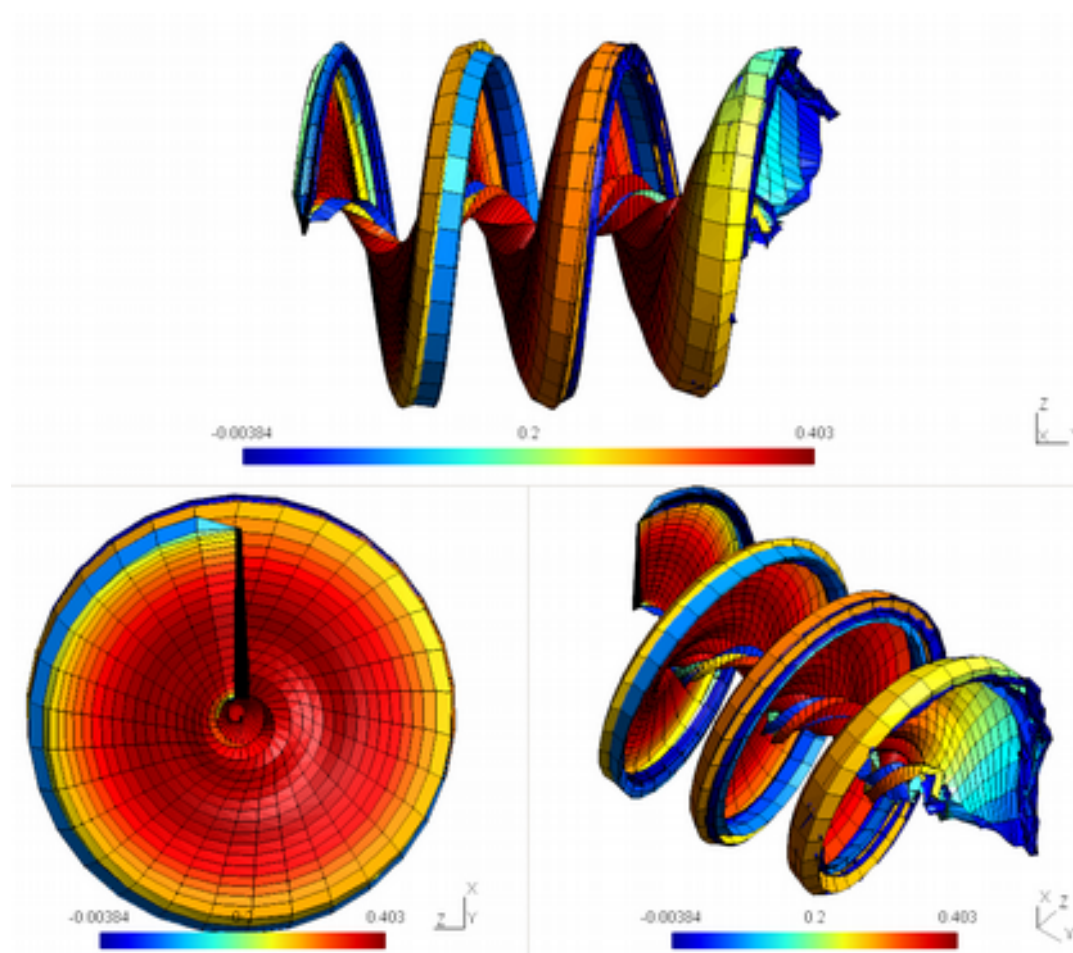




Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

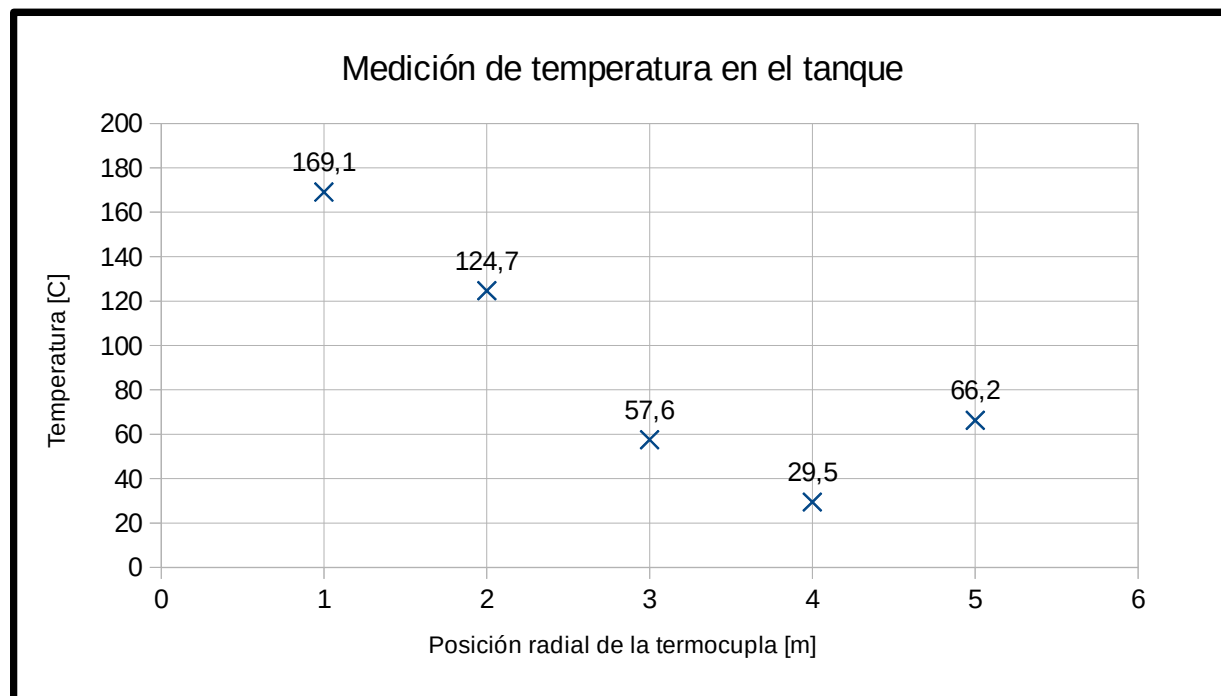
Aula Virtual
<http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico>

Unidad 4: Interpolación y aproximación de funciones

Temario

- Interpolación y ajuste de funciones
- Interpolación polinomial
- Interpolación polinomial directa
- Interpolación por polinomios de Lagrange
- Interpolación por polinomios de Newton
- Interpolación mediante splines cúbicos
- Ajuste de funciones por mínimos cuadrados

Interpolación y ajuste de funciones

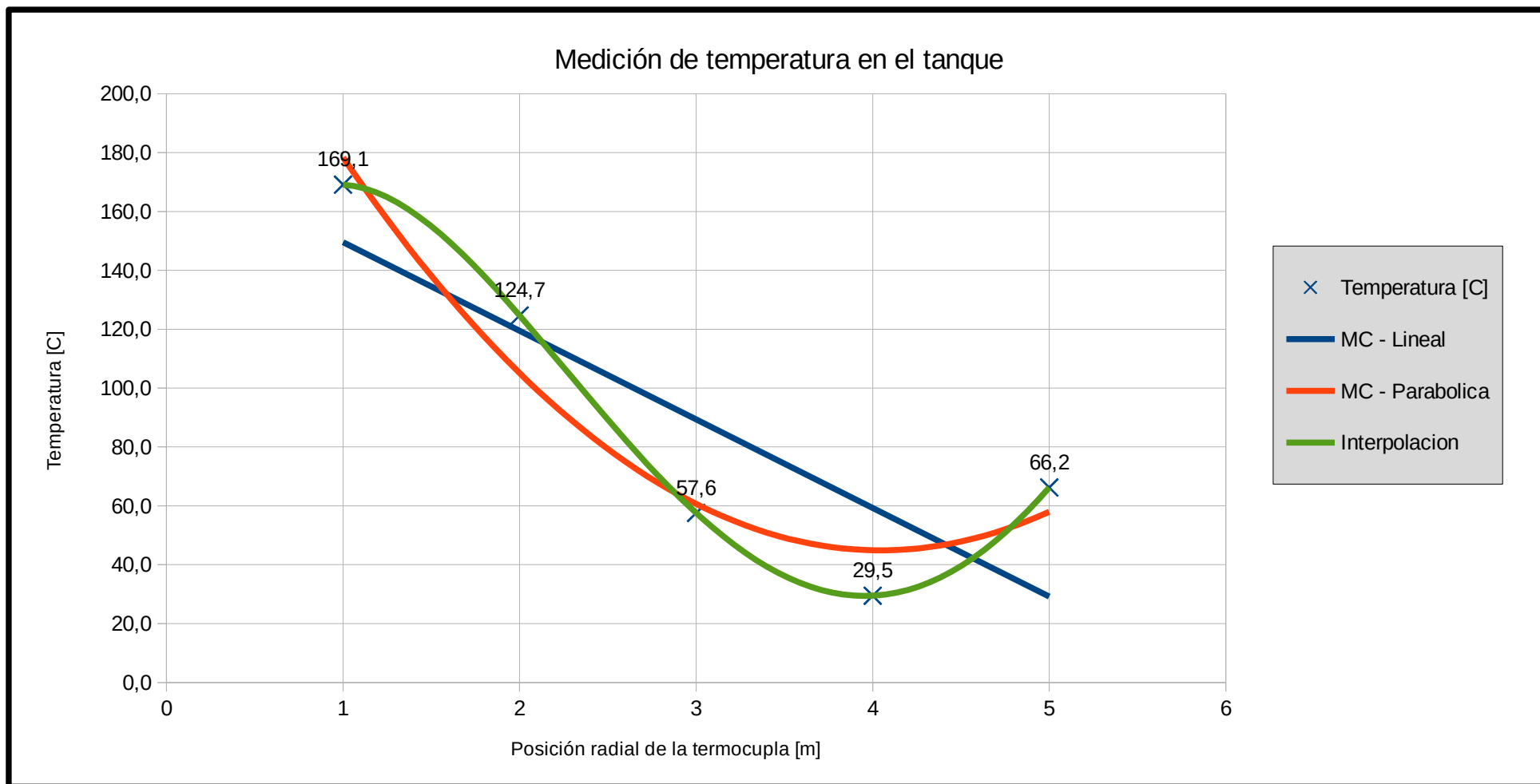


Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

¿Cuál es el máximo valor alcanzado por el experimento?

¿La temperatura alrededor de la posición 1m, es menor?

Interpolación y ajuste de funciones



Interpolación y ajuste de funciones

El objetivo es encontrar una función analítica que represente los datos.

Se propone una representación en forma de combinación lineal de funciones base conocidas y linealmente independientes $\phi_k(x)$

$$y = f(x) \approx P_m(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$

$$f(x) - P_m(x) = r(x)$$

Se evalúa el residuo en cada dato (x_i, y_i)

$$r(x_i) = f(x_i) - P_m(x_i)$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{m1} \\ P_{m2} \\ \vdots \\ P_{mn+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x_1) \\ \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x_2) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \Phi \cdot \mathbf{a}$$

Interpolación y ajuste de funciones

Si se exige que el residuo sea cero en cada punto conocido, se obtiene un SEL, donde las incógnitas son los coeficientes a_k .

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_{n+1}) & \phi_1(x_{n+1}) & \dots & \phi_n(x_{n+1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_{n+1}) & \phi_1(x_{n+1}) & \dots & \phi_n(x_{n+1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Phi \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}$$

A este procedimiento se lo denomina interpolación.

Si en cambio se exige que el cuadrado de la norma del residuo sea la mínima posible, se obtiene otro SEL para los coeficientes incógnita a_k .

$$\min \|\mathbf{r}\|_2^2 \rightarrow \Phi^T \Phi \cdot \mathbf{a} = \Phi^T \cdot \mathbf{y}$$

A este procedimiento se lo denomina aproximación por mínimos cuadrados.

Una vez determinados los coeficientes a_k , la función interpolante o aproximante es la siguiente

$$y \approx \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$

Interpolación polinomial directa

Se utilizan como base los polinomios elementales

$$\phi_0(x)=1, \phi_1(x)=x, \phi_2(x)=x^2, \dots, \phi_n(x)=x^n$$

$$Base = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^n]$$

El SEL a resolver es el siguiente

$$\begin{pmatrix} P_m(x_1) \\ P_m(x_2) \\ \vdots \\ P_m(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ & & \ddots & \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$y \approx \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

Ejemplo

5 puntos, entonces se define un polinomio de grado 4

$$P_4(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

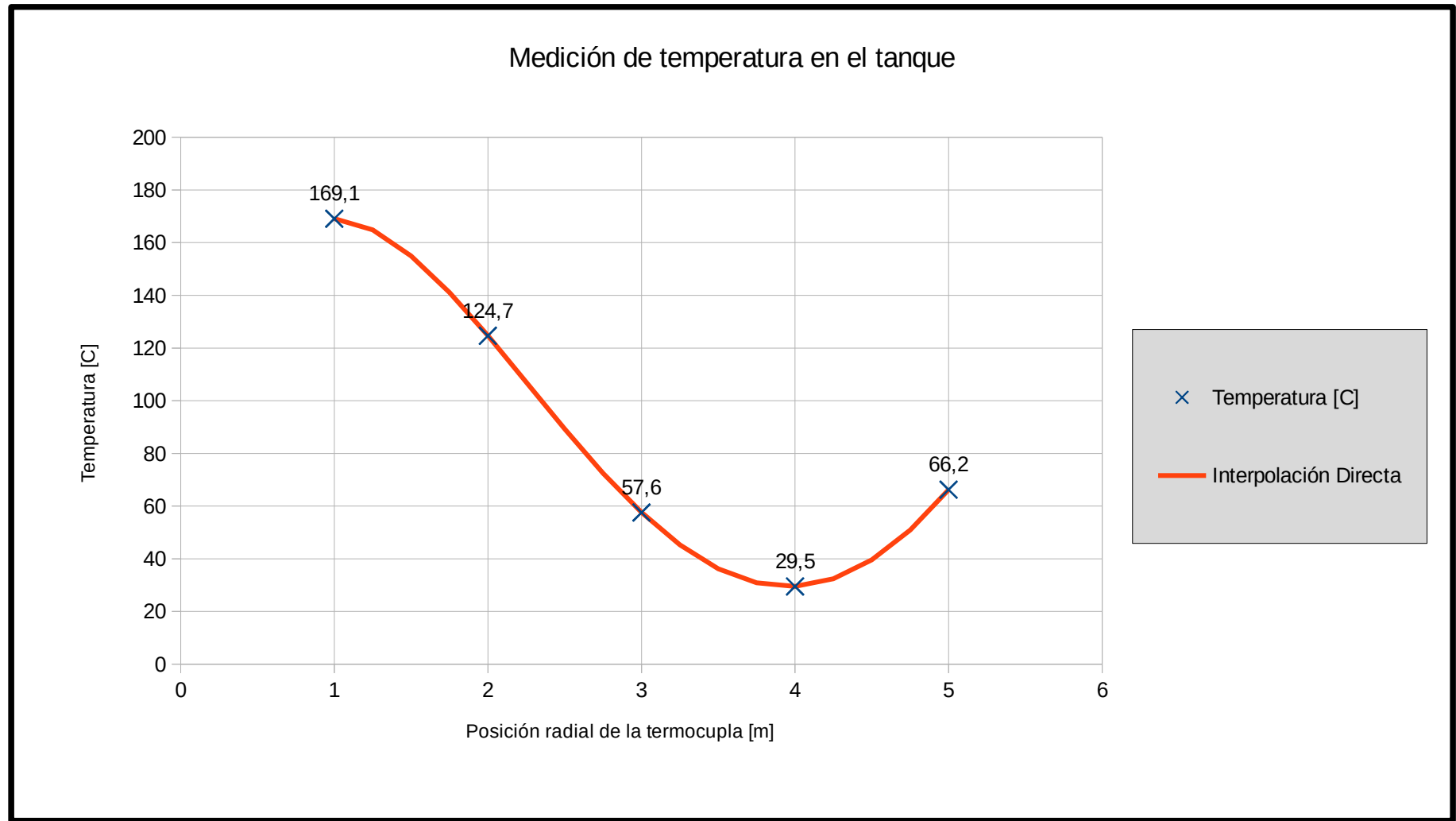
Los coeficientes se encuentran resolviendo el SEL

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169,1 \\ 124,7 \\ 57,6 \\ 29,5 \\ 66,2 \end{pmatrix} \text{ cuya solución es } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 93,2 \\ 177,5583 \\ -125,4042 \\ 25,2417 \\ -1,4958 \end{pmatrix}$$

$$P_4(x) = 93,2 + 177,5583x - 125,4042x^2 + 25,2417x^3 - 1,4958x^4$$

Ejemplo



Interpolación por polinomios de Lagrange

Se utilizan como base los polinomios de Lagrange

$$\phi_k(x) = l_k(x) = \prod_{i=1, i \neq k}^{i=n+1} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

$$l_k(x_k) = \prod_{i=1, i \neq k}^{i=n+1} \frac{(x_k-x_i)}{(x_k-x_i)} = 1$$

$$l_k(x_i) = \prod_{i=1, i \neq k}^{i=n+1} \frac{(x_i-x_i)}{(x_k-x_i)} = 0$$

$$Base = [l_0(x) \quad l_1(x) \quad \dots \quad l_n(x)]$$

El SEL a resolver es el siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{La solución es directa!} \quad a_k = y_{k+1}$$

$$y \approx \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) = y_1 \cdot l_0(x) + y_2 \cdot l_1(x) + y_3 \cdot l_2(x) + \dots + y_{n+1} \cdot l_n(x)$$

Ejemplo 1

x	y
1,5	3
3	4

$$l_0(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^1 \frac{(x - x_k)}{(x_1 - x_k)} = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{(x - 3)}{(1,5 - 3)}$$

$$l_1(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^1 \frac{(x - x_k)}{(x_1 - x_k)} = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x - 1,5)}{(3 - 1,5)}$$

$$P_n(x) = \sum_0^n y_k l_k(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = 3 \frac{(x - 3)}{(1,5 - 3)} + 4 \frac{(x - 1,5)}{(3 - 1,5)}$$

Ejemplo 2

x	y
1,5	3
3	4
4,5	3,5

$$l_0(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^2 \frac{(x - x_k)}{(x_1 - x_k)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 3)(x - 4,5)}{(1,5 - 3)(1,5 - 4,5)}$$

$$l_1(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^2 \frac{(x - x_k)}{(x_1 - x_k)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1,5)(x - 4,5)}{(3 - 1,5)(3 - 4,5)}$$

$$l_2(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 2}}^2 \frac{(x - x_k)}{(x_1 - x_k)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1,5)(x - 3)}{(4,5 - 1,5)(4,5 - 3)}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^2 y_k l_k(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

Al agregar un punto se deben recalcular todos los polinomios...

Ejemplo 3

5 puntos, entonces se define un polinomio de grado 4

$$P_4(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1)(-1)(-2)(-3)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(2)(1)(-1)(-2)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(3)(2)(1)(-1)}$$

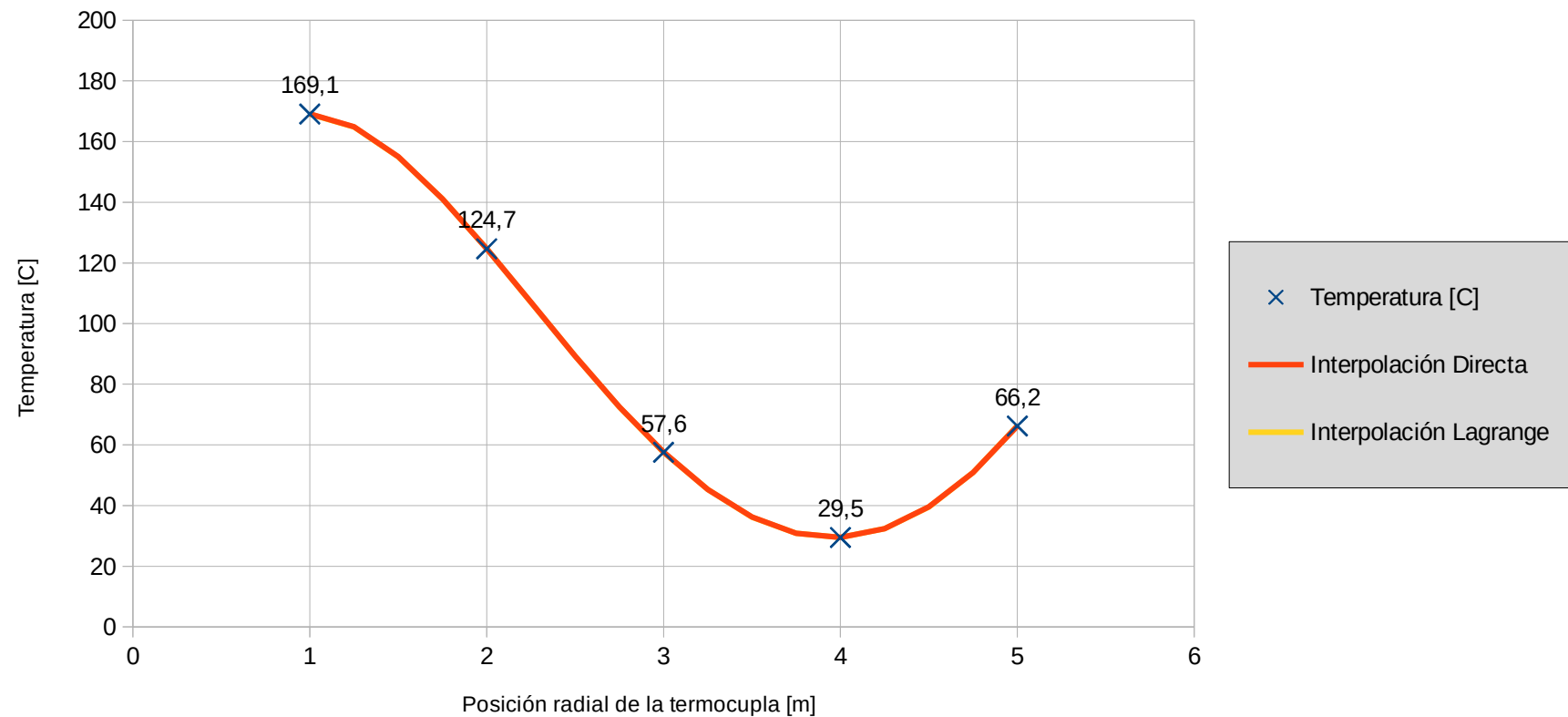
$$l_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(4)(3)(2)(1)}$$

$$P_4(x) = 169,1 \cdot l_0(x) + 124,7 \cdot l_1(x) + 57,6 \cdot l_2(x) + 29,5 \cdot l_3(x) + 66,2 \cdot l_4(x)$$

Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

Ejemplo 3

Medición de temperatura en el tanque



Interpolación por polinomios de Newton

Para construir el polinomio se utilizan los polinomios de Newton que se determinan de forma recursiva.

$$\begin{aligned}
 n_0(x) &= 1 \\
 n_i(x) &= n_{i-1}(x)(x - x_{i-1}) \rightarrow \begin{aligned} n_0(x) &= 1 \\ n_1(x) &= 1(x - x_0) \\ n_2(x) &= 1(x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$Base = [n_0(x) \quad n_1(x) \quad \dots \quad n_n(x)]$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

$$\begin{bmatrix} n_0(x_0)=1 & n_1(x_0)=0 & n_2(x_0)=0 & \dots & n_n(x_0)=0 \\ 1 & n_1(x_1)=x_1-x_0 & n_2(x_1)=0 & \dots & 0 \\ 1 & n_1(x_2)=x_2-x_0 & n_2(x_2)=(x_2-x_0)(x_2-x_1) & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 1 & n_1(x_n)=x_n-x_0 & n_2(x_n)=(x_n-x_0)(x_n-x_1) & \dots & (x_n-x_{n-1})\dots(x_n-x_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Queda un sistema triangular inferior.

Interpolación por polinomios de Newton

El SEL se resuelve con sustitución hacia adelante y los coeficientes resultantes se conocen como las “**diferencias divididas**” de Newton

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \Delta y_1$$

$$a_2 = \frac{\frac{(y_2 - y_0)}{(x_2 - x_0)} - \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{(x_2 - x_1)} = \Delta^2 y_2$$

$$a_3 = \frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{(x_3 - x_2)} = \Delta^3 y_3$$

Interpolación por polinomios de Newton

El proceso de cálculo se puede ordenar de la siguiente forma

x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_1			
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_4$	$\Delta^4 y_4$

Colocar pares de datos (x,y) en primeras dos columnas.

Calcular los Δy usando de “pivot” el par de datos (x_0, y_0)

Calcular los $\Delta^2 y$ usando de “pivot” el par de datos $(x_1, \Delta y)$

Repetir (Calcular los $\Delta^n y$ usando de “pivot” el par de datos $(x_{n-1}, \Delta^{n-1} y)$)

Los **coeficientes** son los componentes de la **diagonal**

Ejemplo 1

x	y
1,5	3
3	4
4,5	3,5

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1,5	3		
3	4	$+(4-3)/(3-1,5)$ $=0,6667$	
4,5	3,5	$+(3,5-3)/(4,5-1,5)$ $=0,1667$	$+(0,1667-0,6667)/(4,5-3)$ $=-0,3333$

$$P_n(x) = 3 + 0,6667(x - 1,5) - 0,3333(x - 1,5)(x - 3)$$

Ejemplo 2

Posición	Temp	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
[m]	[C]				
1	169,1				
2	124,7	-44,4311			
3	57,6	-55,7661	-11,3350		
4	29,5	-46,5370	-1,0529	10,2821	
5	66,2	-25,7129	6,2394	8,7872	-1,4949

$$n_0(x) = 1$$

$$n_1(x) = 1(x-1)$$

$$n_2(x) = n_1(x)(x-2)$$

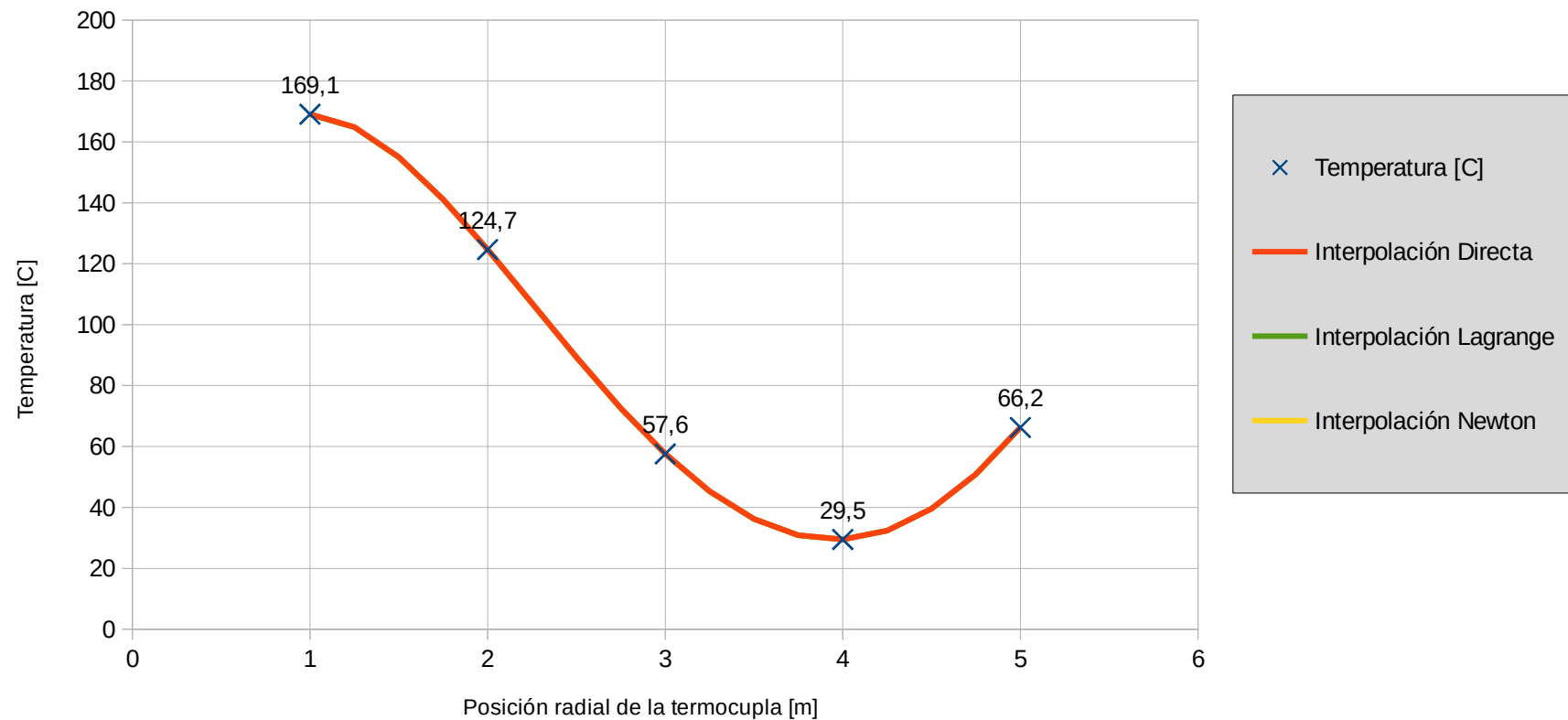
$$n_3(x) = n_2(x)(x-3)$$

$$n_4(x) = n_3(x)(x-4)$$

$$P_4(x) = 169,1 \cdot n_0(x) - 44,4311 \cdot n_1(x) - 11,335 \cdot n_2(x) + 10,2821 \cdot n_3(x) - 1,4949 \cdot n_4(x)$$

Ejemplo 2

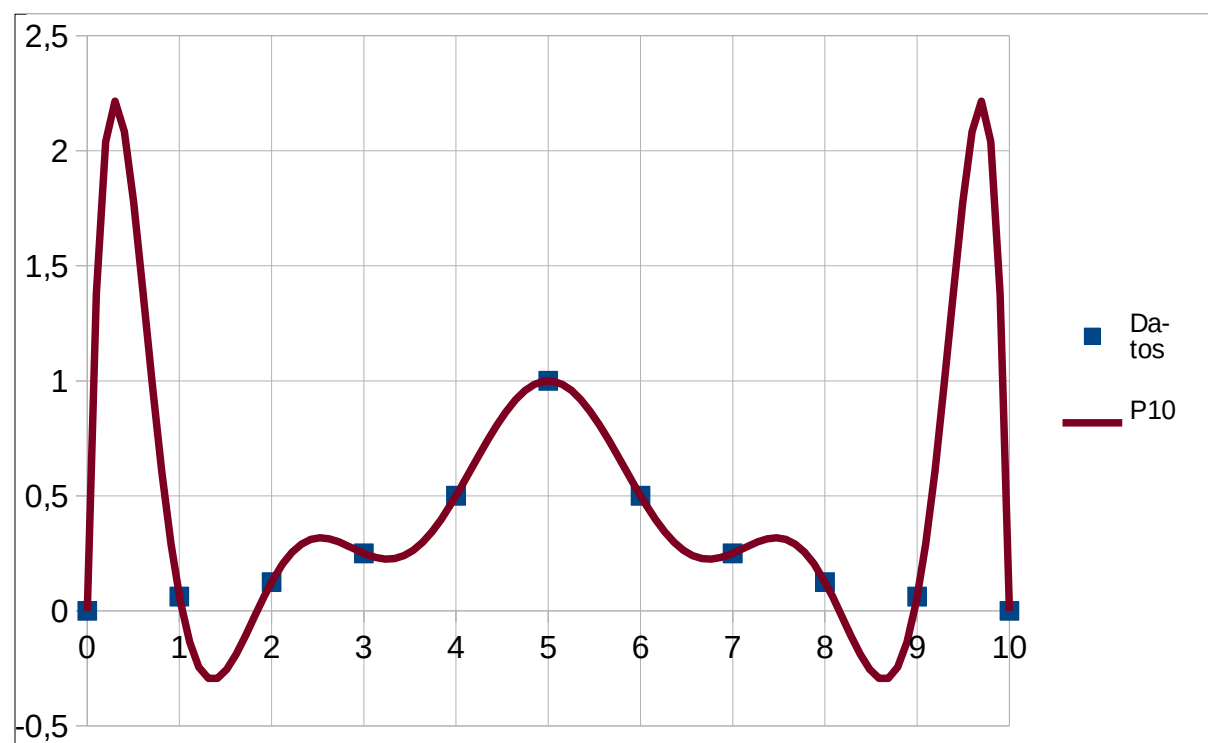
Medición de temperatura en el tanque



Interpolación polinomial

Una de las desventajas de las interpolaciones polinomiales vistas es que para **polinomios de órdenes altos** (>4) se **producen oscilaciones** que por lo general no son realistas. Este efecto se llama **fenómeno de Runge** y muestra una falta de **convergencia** a medida que N tiene a infinito.

x	y
0	0
1	0,0625
2	0,125
3	0,25
4	0,5
5	1
6	0,5
7	0,25
8	0,125
9	0,0625
10	0



Interpolación mediante splines cúbicos

Cuando se cuenta con muchos puntos, es más efectivo **interpolar de a trozos** y unir polinomios interpolantes de bajo grado para evitar oscilaciones.

Definición:

Supongamos que tenemos $N+1$ puntos $\{(x_k, y_k)\}$ cuyas abscisas están **ordenadas de manera creciente**, con $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Se dice que una función $S(x)$ es una **spline cúbica** interpoladora para dichos datos si existen **N polinomios cúbicos** $S_k(x)$, que podemos escribir en función de unos coeficientes $s_{k0}, s_{k1}, s_{k2}, s_{k3}$ como:

$$S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3, \text{ para } x \in [x_k, x_{k+1}] \wedge k = 0, 1, \dots, N-1$$

Y que cumplen las siguientes propiedades:

- 1) $S(x_k) = y_k$, como es una interpolación, S debe pasar por los puntos conocidos
- 2) $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$, El polinomio k se debe conectar con el siguiente (C^0)
- 3) $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$, S debe ser continua (C^1)
- 4) $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$, S debe ser suave (C^2)

Interpolación mediante splines cúbicos

Se denota como k_i a la derivada segunda en el “nudo i ” (punto x_i).

Las derivadas segundas de los polinomios cúbicos se pueden interpolar con polinomios de Lagrange entre dos puntos.

$$S''_{k(i,i+1)}(x) = k_i l_i(x) + k_{i+1} l_{i+1}(x)$$

siendo:

$$l_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad l_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$S''_{k(i,i+1)}(x) = \frac{k_i(x - x_{i+1}) - k_{i+1}(x - x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Interpolación mediante splines cúbicos

Integrando dos veces...

$$S_{k(i,i+1)}(x) = \frac{k_i(x-x_{i+1})^3 - k_{i+1}(x-x_i)^3}{6(x_i-x_{i+1})} + A(x-x_{i+1}) + B(x-x_i)$$

Evaluando en x_i se elimina B

$$S_{k(i,i+1)}(x_i) = y_i = \frac{k_i(x_i-x_{i+1})^3}{6(x_i-x_{i+1})} + A(x_i-x_{i+1})$$

Entonces se puede despejar A

$$A = \frac{y_i}{(x_i-x_{i+1})} - \frac{k_i}{6}(x_i-x_{i+1})$$

Analogamente evaluando en x_{i+1} se obtiene B

$$B = \frac{y_{i+1}}{(x_i-x_{i+1})} - \frac{k_{i+1}}{6}(x_i-x_{i+1})$$

Interpolación mediante splines cúbicos

Sustituyendo las constantes se obtiene la **expresión para la evaluación del polinomio cúbico entre el nudo i e $i+1$**

$$S_{k(i,i+1)}(x) = \frac{k_i}{6} \left[\frac{(x-x_{i+1})^3}{x_i-x_{i+1}} - (x-x_{i+1})(x_i-x_{i+1}) \right] - \frac{k_{i+1}}{6} \left[\frac{(x-x_i)^3}{x_i-x_{i+1}} - (x-x_i)(x_i-x_{i+1}) \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{y_i(x-x_{i+1}) - y_{i+1}(x-x_i)}{x_i-x_{i+1}}$$

El polinomio depende de los valores de las curvaturas en los nudos k_i .

Para encontrar las k_i se utiliza la continuidad de la derivada primera en cada nudo interior y se forma un SEL

$$k_{i-1}(x_{i-1}-x_i) + 2k_i(x_{i-1}-x_{i+1}) + k_{i+1}(x_i-x_{i+1}) = 6 \left(\frac{y_{i-1}-y_i}{x_{i-1}-x_i} - \frac{y_i-y_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \right)$$

Se impone que la curvatura inicial k_0 y final k_N sea cero.

Esta restricción se denomina “**condición natural**”

Interpolación mediante splines cúbicos

Resumen del método

- Se evalúa la condición de continuidad C^1 en los nudos interiores.
- Se asignan ceros a los nudos de los extremos.
- Se resuelve el SEL para obtener las curvaturas en cada nudo interior.
- Se busca cual de los polinomios encierra al punto que se desea evaluar.
- Se usa la función de evaluación.

Ejemplo

Usando interpolación por splines naturales cúbicos encontrar el valor de la función dada por la tabla, en $x=1,5$.

x	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	0

$$k_{i-1}(x_{i-1}-x_i)+2k_i(x_{i-1}-x_{i+1})+k_{i+1}(x_i-x_{i+1})=6\left(\frac{y_{i-1}-y_i}{x_{i-1}-x_i}-\frac{y_i-y_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)$$

$$0+4k_2+k_3=-12$$

$$k_2+4k_3+k_4=12 \rightarrow \text{Resolviendo el SEL: } k_2=k_4=-30/7, k_3=36/7$$

$$k_3+4k_4+0=-12$$

El punto $x=1,5$ yace entre los puntos 1 y 2, entonces se evalúa $S_{k(1,2)}(x=1,5)$

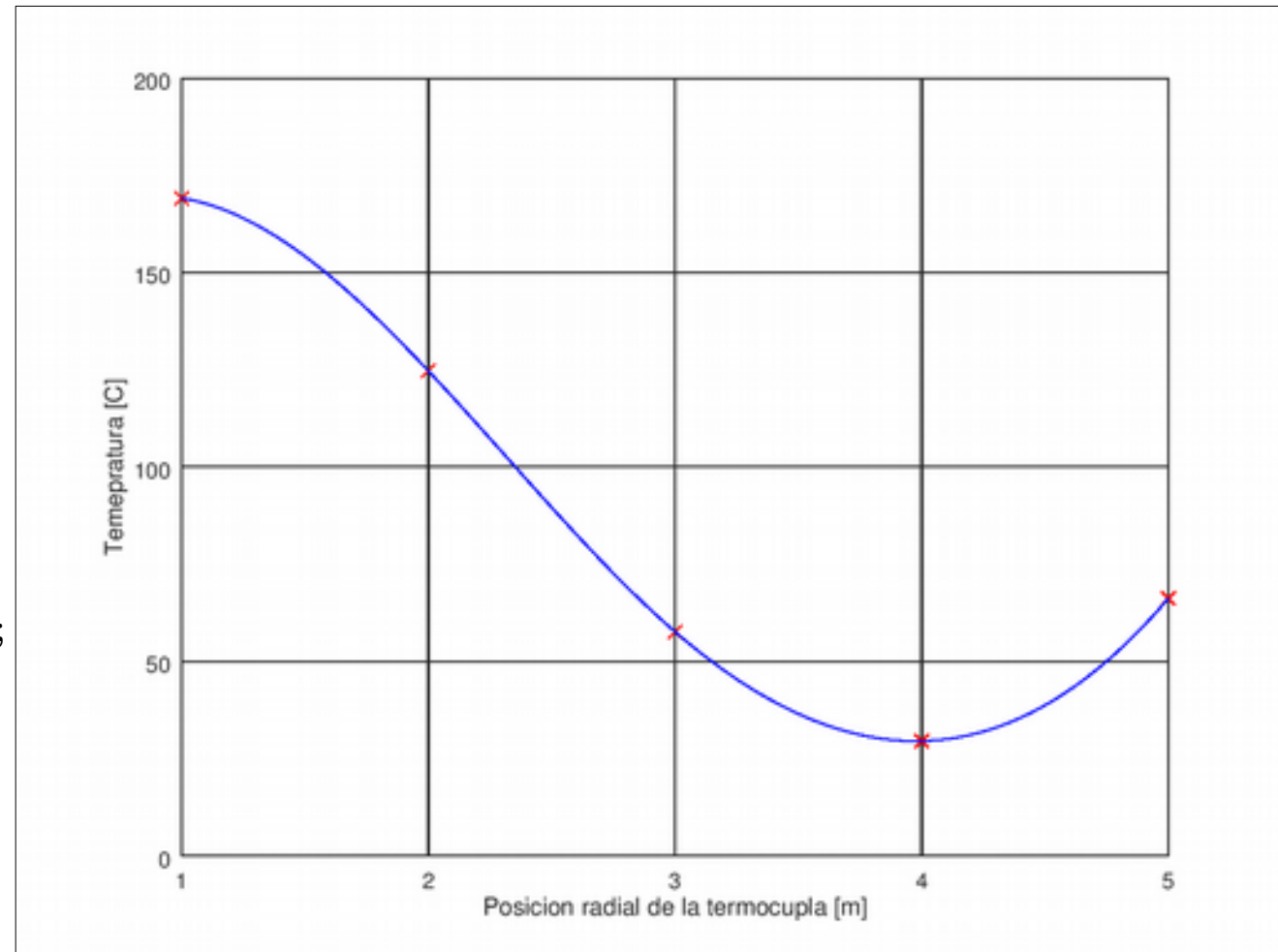
$$S_{k(1,2)}(1,5)=\frac{k_1}{6}\left[\frac{(1,5-x_2)^3}{x_1-x_2}-(1,5-x_2)(x_1-x_2)\right]-\frac{k_2}{6}\left[\frac{(1,5-x_1)^3}{x_1-x_2}-(1,5-x_1)(x_1-x_2)\right]+\frac{y_1(1,5-x_2)-y_2(1,5-x_1)}{x_1-x_2}$$

$$S_{k(1,2)}(1,5)=\frac{k_1}{6}\left[-(1,5-x_2)^3+(1,5-x_2)\right]-\frac{k_2}{6}\left[-(1,5-x_1)^3+(1,5-x_1)\right]-y_1(1,5-x_2)-y_2(1,5-x_1)=0,7679$$

Ejemplo 2

Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

```
X=1:5;
Y=[169.1,124.7,57.6,29.5,66.2];
XI=linspace(1,5,100);
YI=interp1(X,Y,XI,'spline');
plot(X,Y,'xr',XI,YI,'-b')
grid on
```



Ajuste por mínimos cuadrados

Cuando se ajusta un conjunto de datos, **se aproxima la función desconocida** con otra que puede ser una función algebraica, exponencial, logarítmica, etc.

Al realizar la aproximación, **la función aproximante no pasa necesariamente por los puntos**.

El método es **muy útil para identificar líneas de tendencia** en nubes de puntos.

Sea f una función genérica con m parámetros: $f(x) = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$

El método busca el mejor ajuste de los parámetros de la función respecto a los datos

Se observa la función del error cuadrático :

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [r_i]^2, \text{ donde } r_i = y_i - f(x_i) \text{ se denomina residuo}$$

Y se minimiza para cada parámetro, es decir, $\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, k = 1, 2, \dots, m$

En general se buscan ajustes con menos parámetros (m) que cantidad de puntos disponibles (n). Si $m=n$ tendríamos una interpolación.

Ajuste por mínimos cuadrados

Aplicación 1:

Ajuste de una recta (Regresión lineal)

$$f(x) = a + bx$$

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - b x_i)(-1) = 2 \left(-\sum_{i=1}^n y_i + n a + b \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - b x_i)(-x_i) = 2 \left(-\sum_{i=1}^n x_i y_i + a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 0$$

Definiendo: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

se obtienen $a + \bar{x} b = \bar{y}$, $a \bar{x} + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \rightarrow b = \frac{\sum y_i (x_i - \bar{x})}{\sum x_i (x_i - \bar{x})}$, $a = \bar{y} - \bar{x} b$

Ajuste por mínimos cuadrados

Aplicación 2:

Ajuste de funciones algebraicas

$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j f_j(x)$$

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{j=1}^m a_j f_j(x_i) \right]^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2 \left\{ \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{j=1}^m a_j f_j(x_i) \right] f_k(x_i) \right\} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n f_j(x_i) f_k(x_i) \right] a_j = \sum_{i=1}^n y_i f_k(x_i)$$

En notación matricial resulta **$Aa=b$**

$$\text{donde: } A_{kj} = \sum_{i=1}^n f_j(x_i) f_k(x_i), b_k = \sum_{i=1}^n y_i f_k(x_i)$$

Ajuste por mínimos cuadrados

En forma matricial

$$\min \|r\|_2^2 \rightarrow \Phi^T \Phi \cdot a = \Phi^T \cdot y$$

Ajuste de rectas: se utilizan como base $[1, x]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ajuste de parábolas: se utilizan como base $[1, x, x^2]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{n+1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{n+1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ajuste por mínimos cuadrados

Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

$$base = [1, \text{seno}(x), \cos(x)]$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0,8415 & 0,5403 \\ 1 & 0,9093 & -0,4161 \\ 1 & 0,1411 & -0,98999 \\ 1 & -0,7568 & -0,6536 \\ 1 & -0,9589 & 0,2837 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5,0000 & 0,1762 & -1,2358 \\ 0,1762 & 3,0471 & 0,1592 \\ -1,2358 & 0,1592 & 1,9529 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 447,1 \\ 178,004 \\ -18,056 \end{pmatrix}$$

$$\text{la solución del SEL es } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 100,006 \\ 50,026 \\ 49,961 \end{pmatrix}$$

$$y \approx 100,006 + 50,026 \text{ seno}(x) + 49,961 \cos(x)$$

Ajuste por mínimos cuadrados

Medición de temperatura en el tanque

