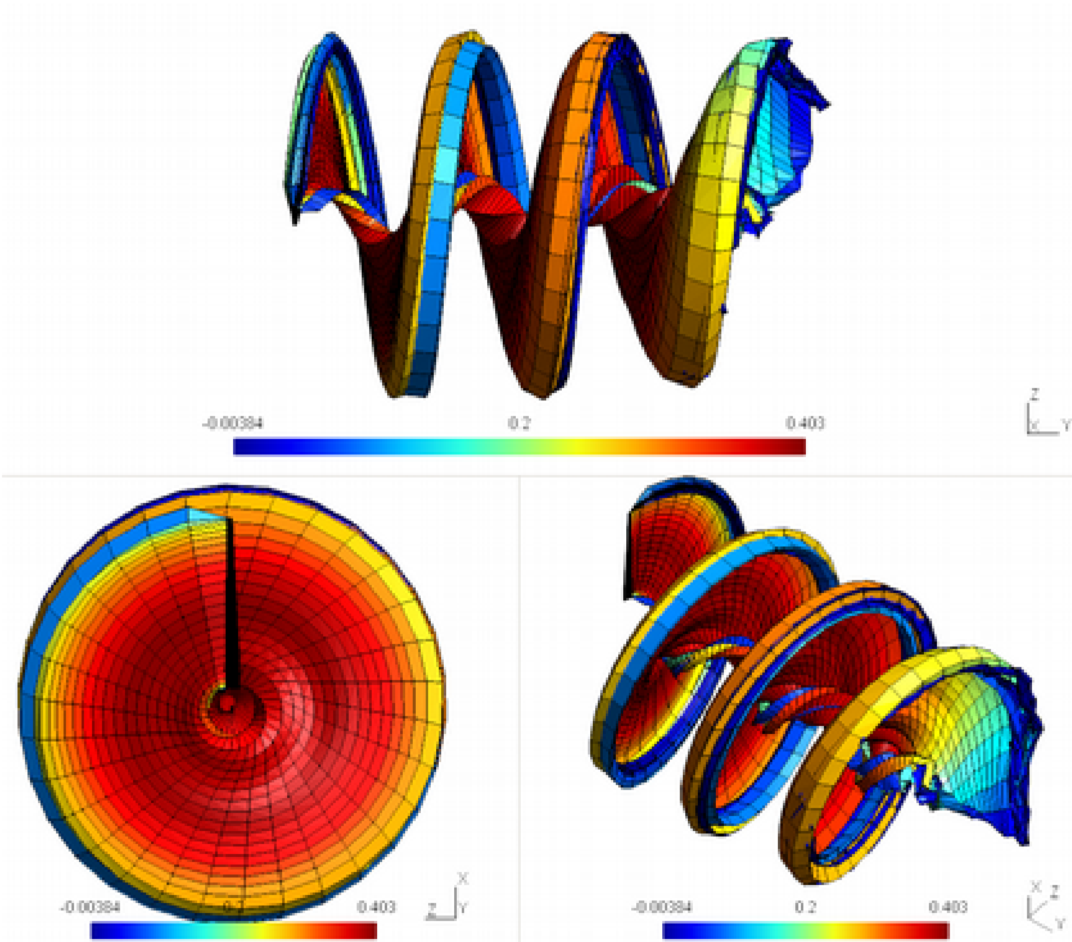
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

Aula Virtual
http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico

Unidad 5: Diferenciación numérica

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Introducción a la diferenciación numérica
- Método general para obtención de fórmulas y su error
- Diferencia finita progresiva, regresiva, centrada y asimétrica
- Diferencia finita de derivadas de orden superior
- Ejemplos de aplicación
- Extrapolación de Richardson

Introducción a la Diferenciación numérica

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La diferenciación numérica trata con el siguiente problema: **dada una función y=f(x)**, se desea obtener una de sus derivadas en un punto dado $x=x_k$. La función puede ser conocida, o se puede conocer solamente el valor que toma en ciertos puntos discretos (x_i , y_i), $i = 1, 2, . . . , n$. En cualquier caso, **disponemos de una cantidad finita de pares ordenados (x,y) a partir de los cuales se desean obtener las derivadas**.

La diferenciación numérica **se puede realizar de varias maneras**, como por ejemplo:

- **Interpolando un polinomio** localmente y luego derivándolo.
- Realizando una **expansión por series de Taylor** de la función f(x) alrededor del punto x_k. Esta opción **permite estimar el error** involucrado en la aproximación.

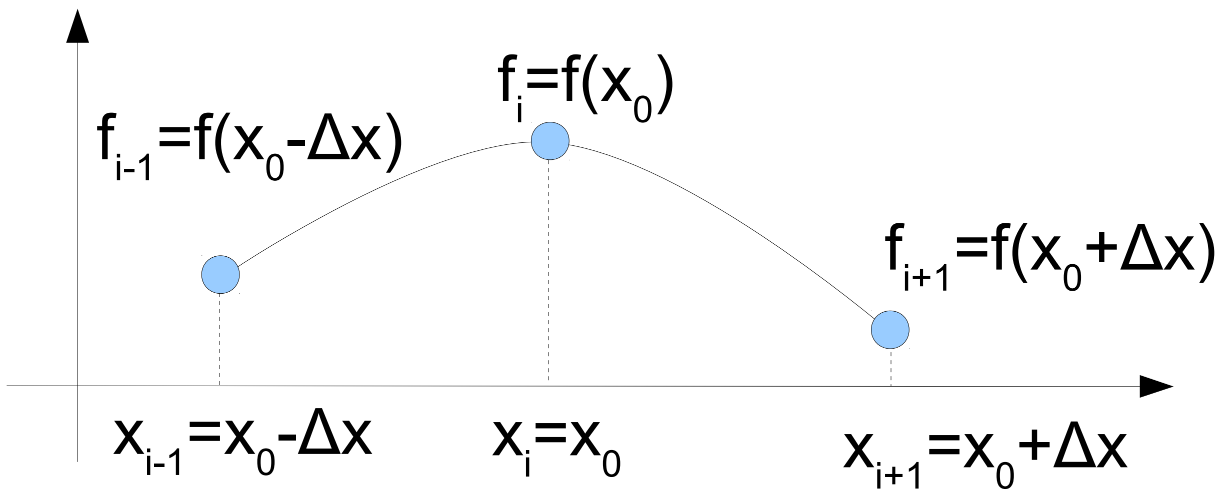
La diferenciación numérica sufre de errores de redondeo, errores de interpolación y errores de truncamiento.

Introducción a la Diferenciación numérica

Nomenclatura:

Se indica con subíndices la posición de cada punto.

La separación de x se denota Δx o h



Introducción a la Diferenciación numérica

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La aproximación de la derivada se puede definir a partir de una expansión en series de Taylor.

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)\Delta x+\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\frac{\Delta x^2}{2!}+\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)\frac{\Delta x^3}{3!}+\ldots$$

Por ejemplo si queremos aproximar la derivada primera y conocemos los valores de la función en x_0 y $x_0+\Delta x$

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\underbrace{\left[\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}\right]}_{\text{Fórmula de cálculo}}+\underbrace{\left[-\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\frac{\Delta x}{2!}-\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)\frac{\Delta x^2}{3!}-\ldots\right]}_{\text{Error de truncamiento}}$$

Fórmula de cálculo

Error de truncamiento

Introducción a la Diferenciación numérica

El **error de truncamiento** es la diferencia entre el valor exacto de la derivada y su representación en diferencias finitas. No se puede determinar con exactitud, pero **se puede caracterizar** mediante la **notación de orden de magnitud O.**

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

Cuando decimos que $ET=O(\Delta x)$, significa que existe una constante positiva K tal que $|ET|\leq K|(\Delta x)|\ \forall$ x del dominio de ET

La notación de orden **no dice nada sobre el valor exacto** del ET pero sí de **cómo se comporta cuando Δx tiende a cero**. Si tuviéramos una expresión con ET de $O(\Delta x^2)$ se espera que su valor sea menor a $O(\Delta x)$.

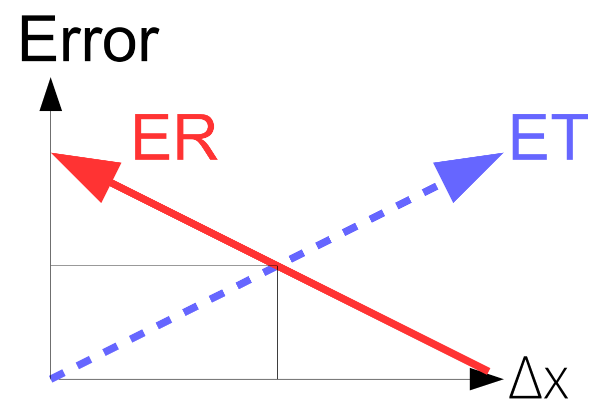
Introducción a la Diferenciación numérica

Idealmente para eliminar el ET se debería usar un Δx suficientemente pequeño, sin embargo, a medida que **Δx se reduce, aumentan los errores de redondeo** producidos por la aritmética de punto flotante.

Por lo tanto, **existe un compromiso entre el error de truncamiento y el error de redondeo**. Si el Δx es muy chico, los errores de redondeo son grandes, mientras que si Δx es grande, el error de truncamiento es grande.

Para mitigar este problema es recomendable

- Utilizar aritmética de **doble precisión**
- Utilizar expresiones con ET de **al menos $O(\Delta x^2)$**



Método general para obtención de fórmulas y su error

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Expansión por series de Taylor:
Queremos determinar una fórmula de diferencias finitas que aproxime la **k-ésima** derivada con un cierto **orden de error m**, $O(\Delta x^m)$.

<u>Procedimiento:</u>

1) Se realizan expansiones en series de taylor para (k+1)+(m-1) puntos vecinos.

2) Se combinan linealmente las expansiones y se divide por h^k.

3) Se impone que las derivadas de orden menor se anulen, y la que se desea hallar esté multiplicada por 1, formando un SEL.

4) Se resuelve el SEL para determinar los coeficientes de la combinación.

Ejemplo

Dado un punto central x_0 queremos determinar una fórmula de diferencias finitas que aproxime la **primer derivada** con un error de $O(\Delta x^1)$.

Se pide primer derivada (k=1) y error de orden 1 (m=1), entonces necesitamos (k+1)+(m-1)=2 puntos. Ya se cuenta con x_0, entonces surgen 2 opciones, usar el punto siguiente x_1 o el anterior x_{-1}. Veamos la primer opción.

Se expande en series de Taylor alrededor de x_0 y x_1

$$f(x_0)=f_0$$

$$f(x_1)=f_0+\frac{df}{dx}(x_0)\Delta x+\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\ldots$$

Se combinan linealmente las expansiones y se divide por Δx

$$\frac{a f_0+b f_1}{\Delta x}=\frac{(a+b)f_0}{\Delta x}+(b)\frac{df}{dx}(x_0)+(b)\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{\Delta x}{2!}+\ldots$$

Ejemplo

$$\frac{a f_0 + b f_1}{\Delta x} = \frac{(a+b) f_0}{\Delta x} + (b)\frac{df}{dx}(x_0) + (b)\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\frac{\Delta x}{2!} + \ldots$$

Se impone la eliminación de los términos de menor orden

$$\begin{matrix} a+b=0 \\ b=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solución es: } \begin{matrix} a=-1 \\ b=1 \end{matrix}$$

La fórmula que aproxima la primer derivada con error de orden 1 es:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{1 f_1 - 1 f_0}{\Delta x} - \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\frac{\Delta x}{2} + \ldots$$

Como se utiliza el punto siguiente (x_1) la fórmula obtenida se denomina **diferencia finita hacia adelante o progresiva**.

Ejemplo

Veamos el otro caso

Se expande en series de Taylor alrededor de x_0 y x_{-1}

$$f(x_0)=f_0$$

$$f(x_{-1})=f_0+\frac{df}{dx}(x_0)(-\Delta x)+\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\frac{(-\Delta x)^2}{2!}+\ldots$$

Se combinan linealmente las expansiones y se divide por h^1

$$\frac{a f_0+b f_{-1}}{\Delta x}=\frac{(a+b) f_0}{\Delta x}-(b)\frac{df}{dx}(x_0)+(b)\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\frac{\Delta x}{2!}+\ldots$$

Se impone la eliminación de los términos de menor orden

$$\begin{matrix} a+b=0 \\ -b=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solución es: } \begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \end{matrix}$$

Ejemplo

La fórmula que aproxima la primer derivada con error de orden 1 es:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{1f_0-1f_{-1}}{\Delta x}-\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{\Delta x}{2}+\ldots$$

Como se utiliza el punto anterior (x_{-1}) la fórmula obtenida se denomina **diferencia finita hacia atrás o regresiva**.

Ejemplo 2

Dado un punto central x_0 queremos determinar una fórmula de diferencias finitas que aproxime la **primer derivada** con un error de **$O(h^2)$**.
Se pide primer derivada (k=1) y error de orden 2 (m=2), entonces necesitamos 3 puntos. Ya se cuenta con x_0, entonces **hay tres opciones**: usar el punto anterior x_{-1} y el próximo x_1(esquema centrado), usar los dos puntos anteriores o los dos siguientes (esquemas asimétricos). Primero vemos el caso centrado.

Se expande en series de Taylor alrededor de x_0, x_{-1} y x_1

$$f(x_0)=f(x_0)$$

$$f(x_{-1})=f(x_0)-\frac{df}{dx}(x_0)h+\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{h^2}{2!}-\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

$$f(x_1)=f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)h+\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{h^2}{2!}+\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

Ejemplo 2 – esquema centrado

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se combinan linealmente:

$$\frac{a\,f(x_{-1})+b\,f(x_0)+c\,f(x_1)}{h}=\frac{(a+b+c)\,f(x_0)}{h}+(-a+c)\frac{df}{dx}(x_0)+\ldots$$

$$\ldots+(a+c)\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{h}{2!}+(-a+c)\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^2}{3!}+\ldots$$

Se impone la eliminación de los términos de menor orden

$$\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ -a+c=1 \\ a+c=0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solución es: } \begin{array}{l} a=-1/2 \\ b=0 \\ c=1/2 \end{array}$$

La fórmula que aproxima la primer derivada con error de orden 2 es:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{-1/2\,f(x_{-1})+0\,f(x_0)+1/2\,f(x_1)}{h}-\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^2}{6}+\ldots$$

Ejemplo 2 – esquema asimétrico

Se expande en series de Taylor alrededor de x_0,x_1 y x_2

$$f(x_0)=f(x_0)$$

$$f(x_1)=f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)h+\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{h^2}{2!}+\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

$$f(x_2)=f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)2h+\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{4h^2}{2!}+\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{8h^3}{3!}+\ldots$$

Se combinan linealmente:

$$\frac{af(x_0)+bf(x_1)+cf(x_2)}{h}=\frac{(a+b+c)f(x_0)}{h}+(b+2c)\frac{df}{dx}(x_0)+\ldots$$

$$\ldots+(b+4c)\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{h}{2!}+(b+8c)\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^2}{3!}+\ldots$$

Ejemplo 2 – esquema asimétrico

$$\frac{a f(x_0)+b f(x_1)+c f(x_2)}{h}=\frac{(a+b+c) f(x_0)}{h}+(b+2c)\frac{df}{dx}(x_0)+\ldots$$

$$\ldots+(b+4c)\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\frac{h}{2!}+(b+8c)\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)\frac{h^2}{3!}+\ldots$$

Se impone la eliminación de los términos de menor orden

$$\begin{aligned} a+b+c&=0\\ b+2c&=1\\ b+4c&=0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solución es: } \begin{aligned} a&=-3/2\\ b&=2\\ c&=-1/2 \end{aligned}$$

La fórmula que aproxima la primer derivada con error de orden 2 es:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{-3 f(x_0)+4 f(x_1)-1 f(x_2)}{2h}+2\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)\frac{h^2}{6}+\ldots$$

Ejemplo 3

Dado un punto central x_0 queremos determinar una fórmula de diferencias finitas que aproxime la **segunda derivada** con un **error de O(h¹).**
Se pide primer derivada (k=2) y error de orden 1 (m=1), entonces necesitamos 3 puntos. Ya se cuenta con x_0, entonces hay tres opciones: usar el punto anterior x_{-1} y el próximo x_1(esquema centrado), usar los dos puntos anteriores o los dos siguientes (esquemas asimétricos). Primero vemos el caso centrado.

Se expande en series de Taylor alrededor de x_0,x_{-1} y x_1

$$f(x_0)=f(x_0)$$

$$f(x_{-1})=f(x_0)-\frac{df}{dx}(x_0)h+\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{h^2}{2!}-\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^3}{3!}+\frac{d^4f}{dx^4}(x_0)\frac{h^4}{4!}+\dots$$

$$f(x_1)=f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)h+\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{h^2}{2!}+\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h^3}{3!}+\frac{d^4f}{dx^4}(x_0)\frac{h^4}{4!}+\dots$$

Ejemplo 3

Se combinan linealmente:

$$\frac{a\,f(x_{-1})+b\,f(x_0)+c\,f(x_1)}{h^2}=\frac{(a+b+c)f(x_0)}{h^2}+\frac{(-a+c)}{h}\frac{df}{dx}(x_0)+\ldots$$

$$\ldots+(a+c)\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{1}{2!}+(-a+c)\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{h}{3!}+(a+c)\frac{d^4f}{dx^4}(x_0)\frac{h^2}{4!}+\ldots$$

Se impone la eliminación de los términos de menor orden

$$\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ -a+c=0 \\ (a+c)/2=1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solución es: } \begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{array}$$

La fórmula que aproxima la segunda derivada con error de orden 1 es:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)=\frac{1f(x_{-1})-2f(x_0)+1f(x_1)}{h^2}-\frac{d^4f}{dx^4}(x_0)\frac{h^2}{4!}+\ldots$$

Resumen – derivadas de primer orden

Derivada de primer orden:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{-1f(x_{-1})+1f(x_0)}{h}+O(h)=\left[-1/h \quad 1/h\right]\cdot\begin{bmatrix}f(x_{-1})\\ f(x_0)\end{bmatrix}+O(h) \quad \text{hacia atrás}$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{-1f(x_0)+1f(x_1)}{h}+O(h)=\left[-1/h \quad 1/h\right]\cdot\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\end{bmatrix}+O(h) \quad \text{hacia adelante}$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{-1f(x_{-1})+1f(x_1)}{2h}+O(h^2)=\left[-1/(2h) \quad 1/(2h)\right]\cdot\begin{bmatrix}f(x_{-1})\\ f(x_1)\end{bmatrix}+O(h^2) \quad \text{centrada}$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-1f(x_2)}{2h}+O(h^2)=\left[-3/(2h) \quad 4/(2h) \quad -1/(2h)\right]\cdot\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\\ f(x_2)\end{bmatrix}+O(h^2) \quad \text{asim}$$

Resumen – derivadas de orden superior

Derivada de segundo orden:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)=\frac{1f(x_{-1})-2f(x_0)+1f(x_1)}{h^2}+O(h^2)=\begin{bmatrix}1/(h^2) & -2/(h^2) & 1/(h^2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}f(x_{-1})\\ f(x_0)\\ f(x_1)\end{bmatrix}+O(h^2)$$

Derivada de tercer orden:

$$\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)=\frac{-1f(x_{-2})+2f(x_{-1})-2f(x_1)+1f(x_2)}{2h^3}+O(h^2)=\begin{bmatrix}-1/(2h^3) & 1/(h^3) & -1/(h^3) & 1/(2h^3)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}f(x_{-2})\\ f(x_{-1})\\ f(x_1)\\ f(x_2)\end{bmatrix}+O(h^2)$$

Derivada de cuarto orden:

$$\frac{d^4 f}{dx^4}(x_0)=\frac{1f(x_{-2})-4f(x_{-1})+6f(x_0)-4f(x_1)+1f(x_2)}{h^4}+O(h^2)$$

Ejemplos de aplicación

Aproximar la derivada de la función exponencial alrededor de x=0

$$f(x)=e^{(-x)}, x_0=0 \rightarrow f'(0)=-1$$

	h	xi-1	xi+1	progresiva	regresiva	error relativo	centrada	error relativo
h	1	-1	1	-0,632121	-1,718282		-1,175201	
h/2	0,5	-0,5	0,5	-0,786939	-1,297443	-24,49 %	-1,042191	-11,32 %
h/4	0,25	-0,25	0,25	-0,884797	-1,136102	-12,44 %	-1,010449	-3,05 %
h/8	0,125	-0,125	0,125	-0,940025	-1,065188	-6,24 %	-1,002606	-0,78 %
h/16	0,0625	-0,0625	0,0625	-0,969391	-1,031911	-3,12 %	-1,000651	-0,19 %
h/32	0,03125	-0,03125	0,03125	-0,984536	-1,015789	-1,56 %	-1,000163	-0,05 %
h/64	0,015625	-0,015625	0,015625	-0,992228	-1,007853	-0,78 %	-1,000041	-0,01 %
h/128	0,007813	-0,007813	0,007813	-0,996104	-1,003916	-0,39 %	-1,00001	0,00 %

¿Si el error es O(h), cuántos decimales del resultado podemos asegurar?
¿Y para O(h^2)?

Ejemplos de aplicación

Calcular la función discreta f'(x) asegurando un error del orden $O(h)^2$

x	0,8	0,9	1	1,1	1,2
f(x)	2,5537129	2,78927897	3	3,19062036	3,36464311

$$\frac{df}{dx}(x_i)=\frac{-1f(x_{i-1})+1f(x_{i+1})}{2h}+O(h^2)=\begin{bmatrix}-1/(2h) & 1/(2h)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}f(x_{i-1})\\ f(x_{i+1})\end{bmatrix}+O(h^2)$$

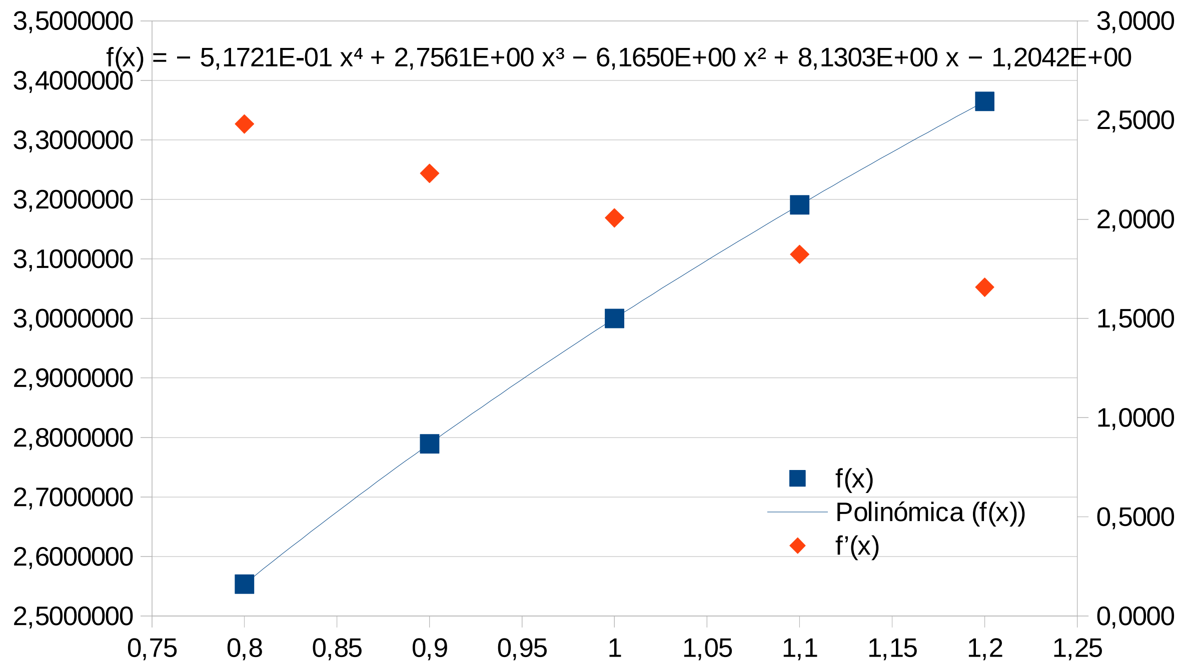
$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-1f(x_2)}{2h}+O(h^2)=\begin{bmatrix}-3/(2h) & 4/(2h) & -1/(2h)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\\ f(x_2)\end{bmatrix}+O(h^2)$$

$$\frac{df}{dx}(x_n)=\frac{3f(x_n)-4f(x_{n-1})+1f(x_{n-2})}{2h}+O(h^2)=\begin{bmatrix}3/(2h) & -4/(2h) & 1/(2h)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}f(x_n)\\ f(x_{n-1})\\ f(x_{n-2})\end{bmatrix}+O(h^2)$$

Ejemplos de aplicación

x	0,8	0,9	1	1,1	1,2
f(x)	2,5537129	2,78927897	3	3,19062036	3,36464311
f'(x)	2,4799	2,2314	2,0067	1,8232	1,6572
P_4'(x)	2,4988	2,2225	1,9998	1,8184	1,6658

¿cuántos decimales del resultado tienen sentido?



Ejemplos de aplicación

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

$$f(x)=\cos(x),\, x_0=\pi/4 \rightarrow f'(\pi/4)=-0{,}7071$$

ΔX	x_{i-1}	x_{i+1}	progresiva	regresiva	centrada
1,5708	-0,7854	2,3562	-0,9003	0,0000	-0,4502
0,7854	0,0000	1,5708	-0,9003	-0,3729	-0,6366
0,3927	0,3927	1,1781	-0,8261	-0,5520	-0,6891
0,1963	0,5890	0,9817	-0,7718	-0,6334	-0,7026
0,0982	0,6872	0,8836	-0,7407	-0,6713	-0,7060
0,0491	0,7363	0,8345	-0,7242	-0,6895	-0,7068
0,0245	0,7609	0,8099	-0,7157	-0,6984	-0,7070
0,0123	0,7731	0,7977	-0,7114	-0,7028	-0,7071

Ejemplos de aplicación

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

$$f(x)=\cos(x),\, x_0=0 \rightarrow f'(0)=0$$

ΔX	x_{i-1}	x_{i+1}	progresiva	regresiva	centrada
1,5708	-1,5708	1,5708	-0,6366	0,6366	0,0000
0,7854	-0,7854	0,7854	-0,3729	0,3729	0,0000
0,3927	-0,3927	0,3927	-0,1938	0,1938	0,0000
0,1963	-0,1963	0,1963	-0,0979	0,0979	0,0000
0,0982	-0,0982	0,0982	-0,0490	0,0490	0,0000
0,0491	-0,0491	0,0491	-0,0245	0,0245	0,0000
0,0245	-0,0245	0,0245	-0,0123	0,0123	0,0000
0,0123	-0,0123	0,0123	-0,0061	0,0061	0,0000

Ejemplos de aplicación

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

$$f(x)=\mathrm{sen}(x),\, x_0=0 \rightarrow f'(0)=1$$

ΔX	x_{i-1}	x_{i+1}	progresiva	regresiva	centrada
1,5708	-1,5708	1,5708	0,6366	0,6366	0,6366
0,7854	-0,7854	0,7854	0,9003	0,9003	0,9003
0,3927	-0,3927	0,3927	0,9745	0,9745	0,9745
0,1963	-0,1963	0,1963	0,9936	0,9936	0,9936
0,0982	-0,0982	0,0982	0,9984	0,9984	0,9984
0,0491	-0,0491	0,0491	0,9996	0,9996	0,9996
0,0245	-0,0245	0,0245	0,9999	0,9999	0,9999
0,0123	-0,0123	0,0123	1,0000	1,0000	1,0000

Extrapolación de Richardson

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La extrapolación de Richardson es un método que **permite aumentar la precisión de resultados** obtenidos por ciertos métodos numéricos.

Supongamos que queremos determinar una cantidad G, que es función del parámetro Δx. Su aproximación es g(Δx) por ende **G = g(Δx)+E(Δx)**, siendo E el error. **Si el error es de la forma c(Δx)^p**, donde p es el orden del error de truncamiento del método utilizado, la extrapolación de Richardson puede **eliminar el primer término del error**.

Se evalúa la cantidad con un cierto *paso* $\Delta x_1 \rightarrow G = g(\Delta x_1) + c(\Delta x_1)^p$

Se evalúa la cantidad con otro *paso* $\Delta x_2 \rightarrow G = g(\Delta x_2) + c(\Delta x_2)^p$

Con ambas ecuaciones se elimina c y se despeja una mejor aproximación de G

$G = \dfrac{\beta g(\Delta x_2) - g(\Delta x_1)}{\beta - 1}$, siendo $\beta = \left(\dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^p$ cuando los métodos son distintos, p es el menor

El orden de error de la extrapolación es p+2

Extrapolación de Richardson

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

$$f(x)=e^{(-x)}, x_0=0 \rightarrow f'(0)=-1$$

$$G=\frac{\beta g(\Delta x_2)-g(\Delta x_1)}{\beta-1}$$

$$\beta=\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^p$$

$$\beta=2$$

ΔX	Diferencia progresiva	Error absoluto	Richardson con p=1	Error absoluto	Diferencia centrada	Error absoluto
1	-0,632121		---		-1,175201	
0,5	-0,786939	0,213061	-0,941757	0,058243	-1,042191	0,042191
0,25	-0,884797	0,115203	-0,982655	0,017345	-1,010449	0,010449
0,125	-0,940025	0,059975	-0,995253	0,004747	-1,002606	0,002606
0,0625	-0,969391	0,030609	-0,998757	0,001243	-1,000651	0,000651
0,03125	-0,984536	0,015464	-0,999681	0,000319	-1,000163	0,000163
0,015625	-0,992228	0,007772	-0,99992	0,00008	-1,000041	0,000041
0,007813	-0,996104	0,003896	-0,99998	0,00002	-1,00001	0,00001

Extrapolación de Richardson

Richard Dean Ander**son**
Es tan útil como “McGyver”