

Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

Aula Virtual
<http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico>

Unidad 6: Cuadratura

Temario:

- Integración numérica
- Método de Newton-Cotes
 - Regla del Trapecio simple y compuesta
 - Regla de Simpson $\frac{1}{3}$ y compuesta
- Extrapolación de Richardson
- Integración de Romberg
- Método de Gauss - Legendre

Introducción

Para aproximar la integral definida de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se utiliza una estrategia similar a la definición de la integral (recordar sumatoria de Riemann).

$$\int_a^b f(x) dx \approx I = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Los coeficientes w_i se denominan **pesos** y las abscisas x_i **nodos**. Los pesos y los nodos dependen del método de cuadratura.

Todos los métodos de cuadratura **se basan en la interpolación polinomial**, por lo tanto son más efectivos cuando la función se puede aproximar por polinomios.

Los métodos se pueden separar en **dos grandes grupos**: los derivados por las **fórmulas de Newton-Cotes** y los de la **cuadratura de Gauss**.

Para el primer caso, los nodos están **equiespaciados**, mientras que para el segundo, **la posición de los nodos se calcula** para lograr la máxima precisión posible.

Método de Newton-Cotes

Se aproxima $f(x)$ **interpolando un polinomio** de grado $n-1$ por los n puntos conocidos. Las funciones base son los polinomios de Lagrange.

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{Donde } L_i(x) \text{ son las funciones de Lagrange.}$$

Se reemplaza la función por el polinomio + el error de interpolación $E(x)$ y se integra

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_{n-1}(x) dx + \int_a^b E(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \right) + E(h) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E(h)$$

$$\text{siendo } w_i = \int_a^b L_i(x) dx, i = 1, 2, \dots, n$$

Esta parte se denomina **cuadratura** y depende de las funciones de Lagrange

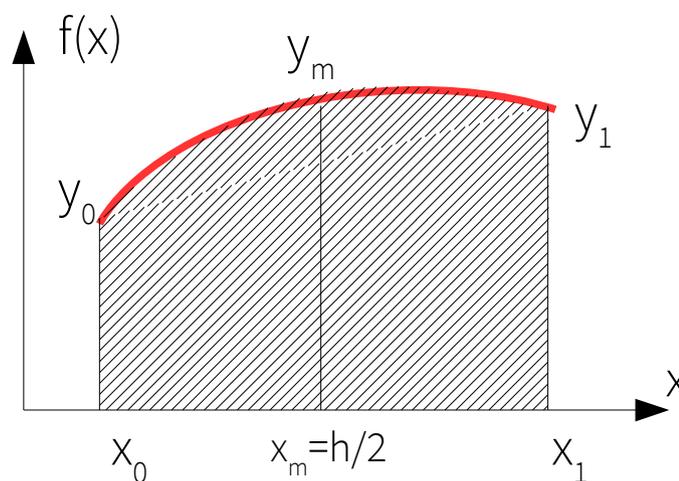
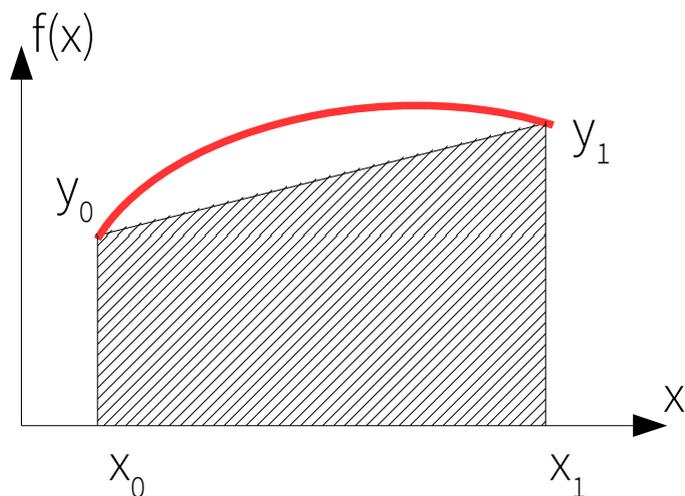
Método de Newton-Cotes

Según la cantidad de puntos n , se obtienen distintas reglas de integración.

Las reglas clásicas son:

Regla del trapecio, $n=2$ $I = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + O(h^3)$

Regla de $\frac{1}{3}$ Simpson, $n=3$ $I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_m) + f(x_1)] + O(h^5)$



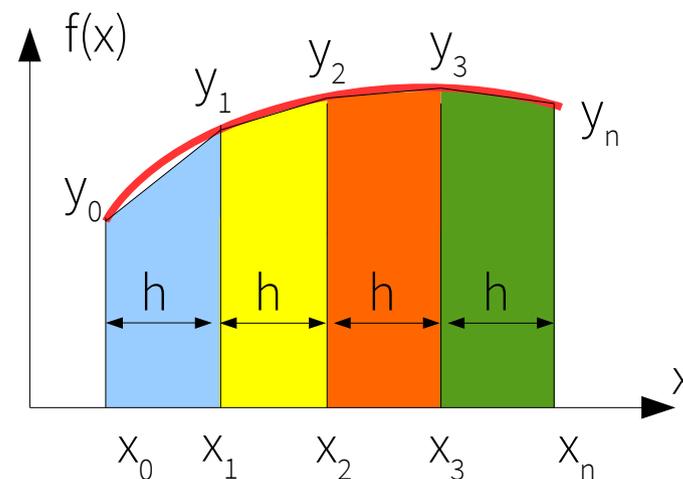
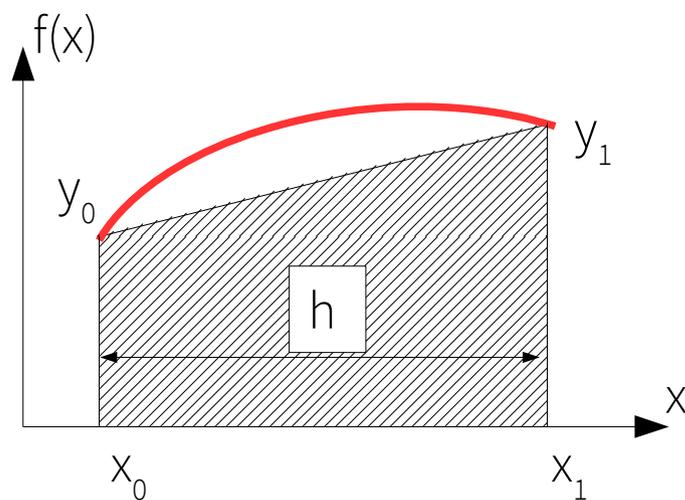
Regla del trapecio

Simple: $I = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + O(h^3)$

Compuesta: $I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] + O(h^2)$

Las fórmulas compuestas pierden un orden de error

En vez de integrar todo el intervalo, se particiona el mismo para mejorar la aproximación. Los puntos interiores se suman 2 veces.



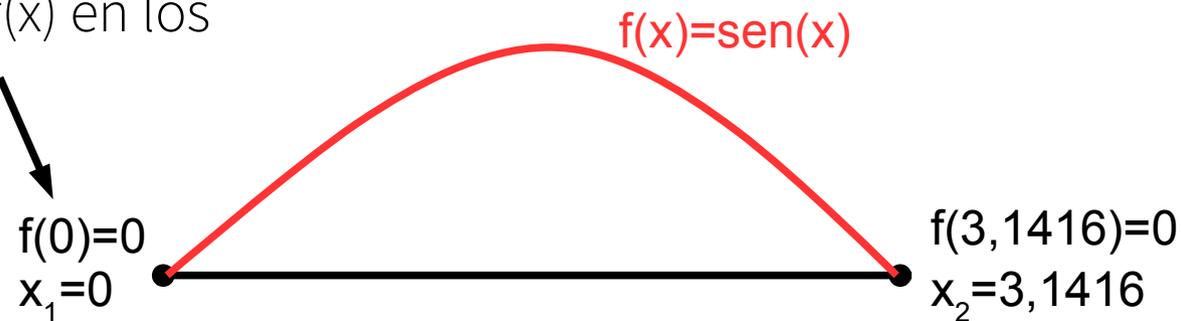
Ejemplo 1

Para 1 subintervalo (o panel) $h_1 = 3,1461$

Solución analítica

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

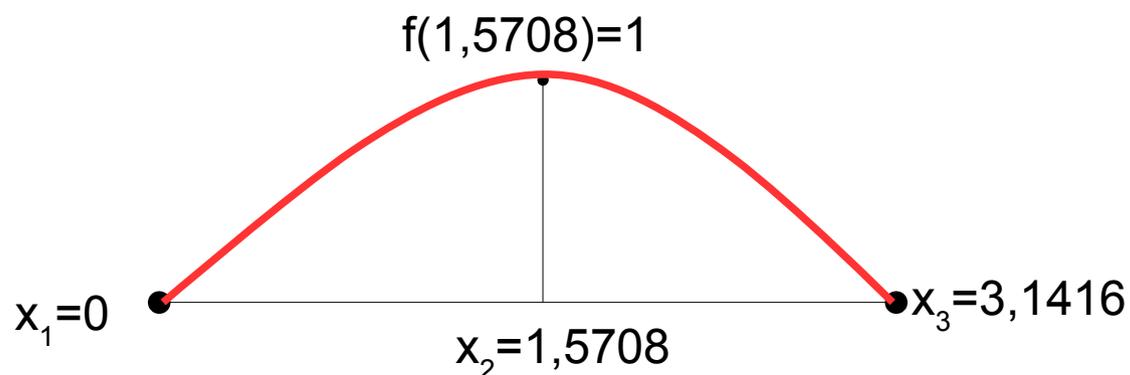
Evaluar $f(x)$ en los
puntos



$$I_1 = \frac{h_1}{2} [f(x_1) + f(x_2)] = \frac{3,1416}{2} [0 + 0] = 0$$

Ejemplo 1

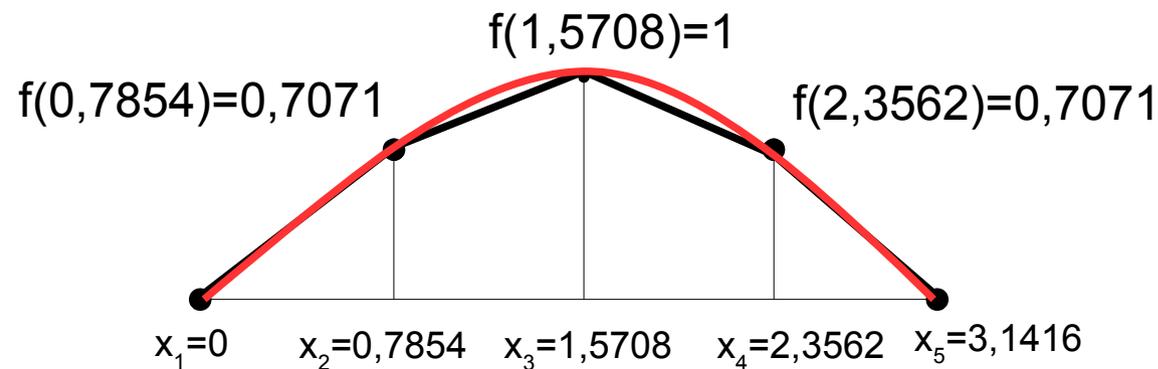
Para 2 paneles, $h_2 = 3,1416/2 = 1,5708$



$$I_2 = \frac{h_2}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h_2}{2} [f(x_2) + f(x_3)] = \frac{1,5708}{2} (0 + 2(1) + 0) = 1,5708$$

Ejemplo 1

Para 4 paneles, $h_4 = 3,1416/4 = 0,7854$

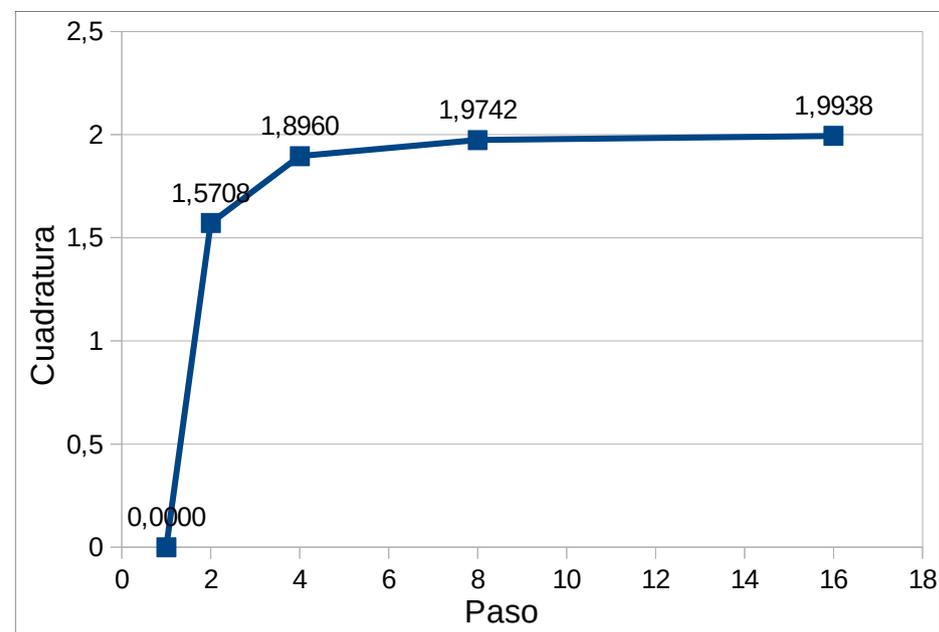


$$I_3 = \frac{h_3}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h_3}{2} [f(x_2) + f(x_3)] + \frac{h_3}{2} [f(x_3) + f(x_4)] + \frac{h_3}{2} [f(x_4) + f(x_5)]$$

$$I_3 = \frac{0,7854}{2} (0 + 2(0,7071) + 2(1) + 2(0,7071) + 0) = 1,8961$$

Ejemplo 1

| Paneles | Paso | Cuadratura | Error relativo $ I_k - I_{k-1} $ |
|---------|--------|------------|-------------------------------------|
| 1 | 3,1416 | 0 | 0 |
| 2 | 1,5708 | 1,5708 | 1,5708 |
| 4 | 0,7854 | 1,896 | 0,3252 |
| 8 | 0,3927 | 1,9742 | 0,0782 |
| 16 | 0,1964 | 1,9938 | 0,0196 |



Ejemplo 1

Evaluemos el error obtenido en la última iteración

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f'''(\zeta) = -\frac{(\pi-0)0,1964^2}{12} (-\text{sen}(\zeta)) = 0,0101 \text{sen}(\zeta)$$

El valor de ζ es desconocido pero sabemos que el seno está acotado por -1 y +1

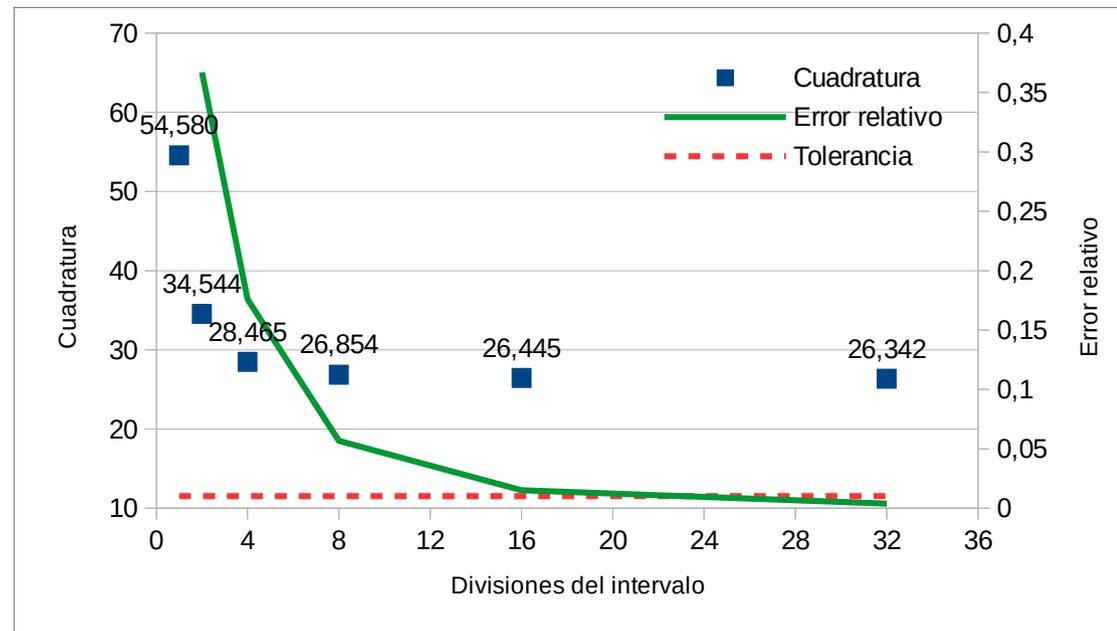
Por lo tanto el valor del error estará acotado por $-0,0101 < E < 0,0101$

La solución analítica estará acotada entre: $1,9938 < \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx < 2,0039$

Ejemplo 2

Evaluar $\int_0^4 \sinh(x) dx$ con una tolerancia de 0,01

| divisiones | paso | Cuadratura | Error relativo |
|------------|-------|------------|----------------|
| 1 | 4 | 54,5798 | 54,5798 |
| 2 | 2 | 34,5436 | -0,3671 |
| 4 | 1 | 28,4649 | -0,1760 |
| 8 | 0,5 | 26,8541 | -0,0566 |
| 16 | 0,25 | 26,4451 | -0,0152 |
| 32 | 0,125 | 26,3425 | -0,0039 |



Ejemplo 3

Evaluar $\int_0^{2,5} f(x) dx$ a partir de los datos de la tabla

| | | | | | | |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
| f(x) | 1,5000 | 2,0000 | 2,0000 | 1,6364 | 1,2500 | 0,9565 |

$$I = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^4 (f(x_i)) + f(x_5)] = \frac{0,5}{2} [1,5 + 2(2 + 2 + 1,6364 + 1,25) + 0,9565] = 4,0573$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int_{1,1}^{1,5} f(x) dx$ a partir de los datos de la tabla

| | | | |
|------|--------|-----|--------|
| x | 1,1 | 1,3 | 1,5 |
| f(x) | 3,0042 | 3,2 | 4,4817 |

$$I = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^1 (f(x_i)) + f(x_2)] = \frac{0,2}{2} [3,0042 + 2(3,2) + 4,4817] = 1,38859$$

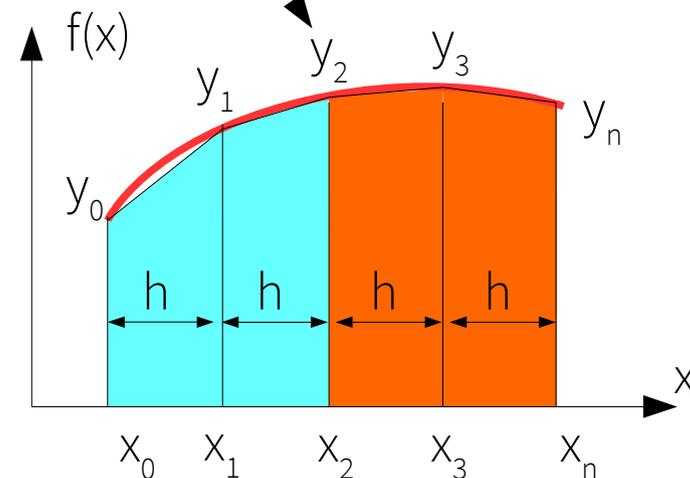
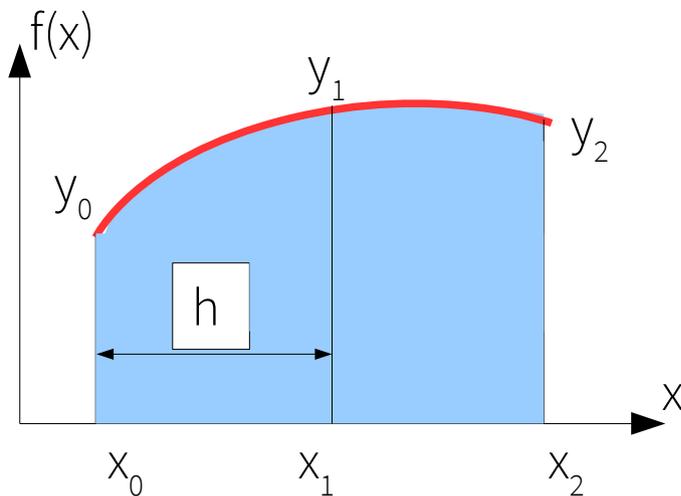
Regla de Simpson 1/3

Simple: $I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + O(h^5)$

Compuesta: $I = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i \text{ impar}} f(x_i) + 2 \sum_{i \text{ par}} f(x_i) + f(x_n) \right] + O(h^4)$

Cuidado: El intervalo debe estar dividido en un **número par** de subintervalos

Los puntos interiores pares se suman 2 veces porque comparten intervalos.



Ejemplo 1

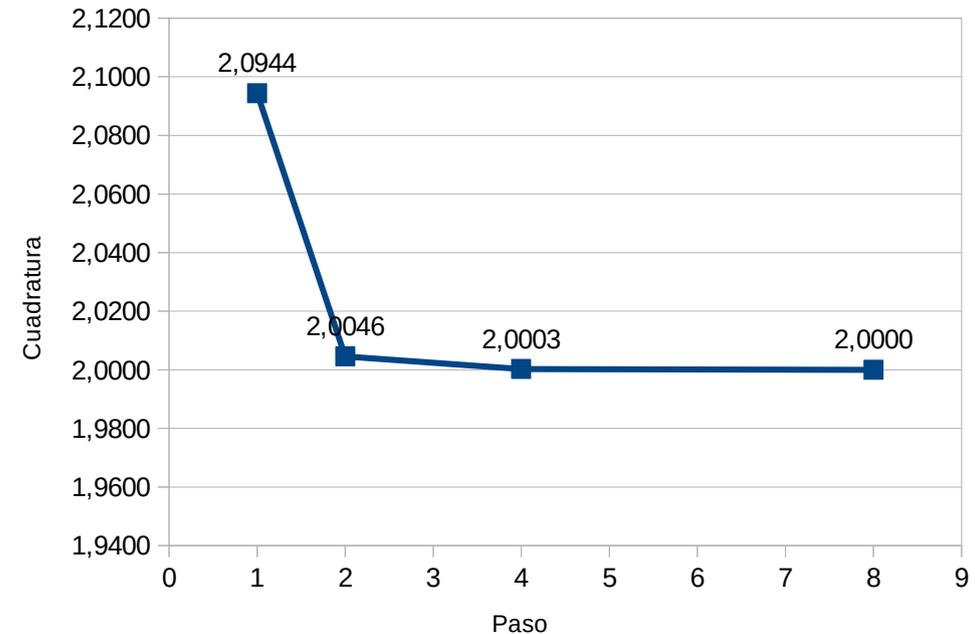
| Paneles | paso | Cuadratura Simpson | Error relativo |
|---------|--------|--------------------|----------------|
| 1 | 1,5708 | 2,0944 | |
| 2 | 0,7854 | 2,0046 | 4,29E-02 |
| 4 | 0,3927 | 2,0003 | 2,14E-03 |
| 8 | 0,1963 | 2,0000 | 1,26E-04 |

$$x_0=0, x_1=1,5708, x_2=3,1416$$

$$I_1 = \frac{1,5708}{3} [\text{sen}(0) + 4 \text{sen}(1,5708) + \text{sen}(\pi)] = 2,0944$$

$$x_0=0, x_1=0,7854, x_2=1,5708, x_3=2,3562, x_4=3,1416$$

$$I_2 = \frac{0,7854}{3} [\text{sen}(0) + 4(\text{sen}(0,7854) + \text{sen}(2,3562)) + 2(\text{sen}(1,5708)) + \text{sen}(\pi)] = 2,0046$$



Integración de Romberg

¿Recuerdan la extrapolación de Richardson? →

¿Qué pasaría si se combina con la regla de trapecio?

La respuesta es la integración de Romberg



Se introduce la notación $R_{i,1} = I_i$, siendo I_i la cuadratura obtenida con 2^{i-1} paneles

Se comienza evaluando $R_{1,1} = I_1$ (un panel) y $R_{2,1} = I_2$ (dos paneles)

Luego se utiliza la extrapolación de Richardson con $p=2$, para eliminar el término del error

de mayor orden, y se obtiene
$$R_{2,2} = \frac{2^p R_{2,1} - R_{1,1}}{2^p - 1} = \frac{4}{3} R_{2,1} - \frac{1}{3} R_{1,1}$$

Para continuar se evalúa $R_{3,1} = I_3$ (cuatro paneles) y se repite la extrapolación de Richardson

utilizando $p=2$
$$R_{3,2} = \frac{4}{3} R_{3,1} - \frac{1}{3} R_{2,1}$$

Ahora tenemos dos resultados de $O(h^{p+2})$ y se pueden extrapolar con $p=4$

$$R_{3,3} = \frac{16}{15} R_{3,2} - \frac{1}{15} R_{2,2}$$

Integración de Romberg

La secuencia se puede colocar en una tabla, donde los elementos de primer columna son calculados por la regla de trapecios y los demás resultan de la extrapolación de Richardson

Aumenta el orden del error p

$\xrightarrow{\hspace{10em}}$
 $o(h^2) \quad o(h^4) \quad o(h^6)$

\downarrow
 Aumenta la
cantidad de paneles

$$\begin{array}{c}
 h \\
 h/2 \\
 h/4
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 R_{1,1} & \cdot & \cdot \\
 R_{2,1} & R_{2,2} & \cdot \\
 R_{3,1} & R_{2,2} & R_{3,3}
 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

| Paneles | I_i | $R_{i,1} = 4/3I_i - 1/3I_{i-1}$ | $R_{i,2} = 16/15I_i - 1/15I_{i-1}$ |
|---------|--------|---------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 0 | | |
| 2 | 1,5708 | 2,0944 | |
| 4 | 1,896 | 2,0044 | 1,9984 |
| 8 | 1,9742 | 2,0003 | 2,0000 |
| 16 | 1,9938 | 2,0003 | 2,0003 |

Ejemplo 2

Evaluar $\int_0^4 \sinh(x) dx$ con una tolerancia de 0,01

| divisiones | paso | Cuadratura | p=2 | p=4 | p=6 | p=8 | p=10 |
|------------|-------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 4 | 54,5798 | | | | | |
| 2 | 2 | 34,5436 | 27,8649 | | | | |
| 4 | 1 | 28,4649 | 26,4386 | 26,3436 | | | |
| 8 | 0,5 | 26,8541 | 26,3171 | 26,3090 | 26,3085 | | |
| 16 | 0,25 | 26,4451 | 26,3088 | 26,3082 | 26,3082 | 26,3082 | |
| 32 | 0,125 | 26,3425 | 26,3083 | 26,3082 | 26,3082 | 26,3082 | 26,3082 |

$$R_{i,j} = \frac{2^p R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{2^p - 1}$$

Con 16 paneles (la mitad que para trapecios compuesto) se obtiene la tolerancia requerida

Cuadratura de Gauss (y amigos)

Las fórmulas de cuadratura de Gauss tienen la misma forma que las de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x) dx \approx I = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

En el método de **Newton-Cotes**, los **nodos** se colocan espaciados uniformemente en (a,b) , es decir, se colocan en **posiciones predeterminadas**.

Para la integración de **Gauss**, se calculan los pesos y las posiciones nodales **asumiendo que la aproximación es exacta para una función $f(x)$ que equivale a un polinomio de grado $2n-1$ o menor**. Es decir, tanto los pesos como las posiciones de los nodos se deben calcular antes de calcular la cuadratura.

Cuadratura de Gauss (y amigos)

Ejemplo, queremos integrar $f(x)$ entre -1 y $+1$ con 2 puntos

Como son 2 puntos, la integración será exacta para polinomios de hasta grado 3.

Buscamos determinar A_1, x_1, A_2, x_2 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^2 A_i P_m(x_i), m \leq 2n-1$

$$\int_{-1}^1 x^0 dx = 2 = A_1 + A_2$$

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = A_1 x_1^1 + A_2 x_2^1$$

→ La solución es: $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, A_1 = 1, A_2 = 2$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2$$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3$$

Y la fórmula de cuadratura resulta

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Cuadratura de Gauss (y amigos)

Como es laborioso encontrar los pesos y nodos, existen varias soluciones “clásicas” que ya fueron calculadas y están tabuladas (por amigos :D)

Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n A_i f(\xi_i)$$

| Nodos | ζ_i | A_i |
|-------|----------------------------------|----------------------|
| 1 | 0,000000 | 2,000000 |
| 2 | $\pm\sqrt{1/3}$ | 1,000000 |
| 3 | 0,000000 $\pm\sqrt{3/5}$ | 8/9 5/9 |
| 4 | $\pm 0,339981$ $\pm 0,861136$ | 0,652145 0,347855 |

Gauss-Laguerre

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(\zeta_i)$$

| Nodos | ζ_i | A_i |
|-------|----------------------------------|---|
| 2 | 0,585786 3,414214 | 0,853554 0,146447 |
| 3 | 0,415775 2,294280 6,289945 | 0,711093 0,278517 0,103892(10 ⁻¹) |

Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(\zeta_i)$$

| Nodos | ζ_i | A_i |
|-------|----------------------------|----------------------|
| 2 | $\pm 0,707107$ | 0,886227 |
| 3 | 0,000000 $\pm 1,224745$ | 1,181636 0,295409 |

Cuadratura de Gauss-Legendre

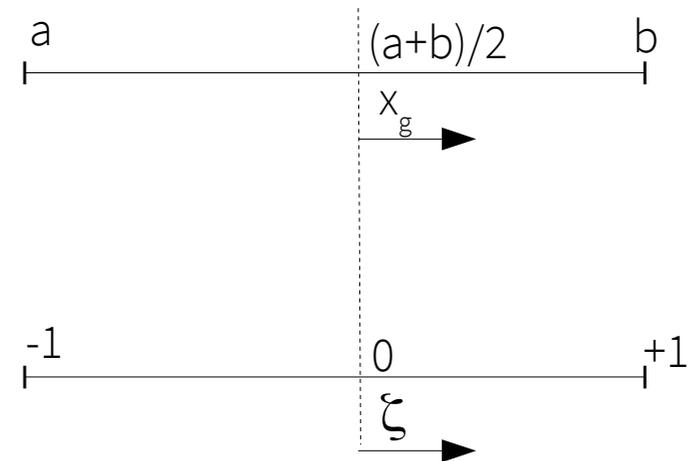
La cuadratura de Gauss-Legendre resuelve integrales en el intervalo $[-1,1]$.

Para poder aplicar la fórmula de cuadratura debemos transformar el intervalo de **integración original** (a,b) al **intervalo estándar** $(-1,1)$

$$x_g = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \zeta \rightarrow dx_g = d\zeta \frac{b-a}{2}$$

Habiendo determinado los **puntos de gauss** x_g se evalúa la función en los mismos y se resuelve la integral

$$\int_a^b f(x_g) dx_g \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_{g_i})$$



Ejemplo 1

Puntos de Gauss: $x_g = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \zeta$

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx \approx \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_{g_i})$$

Con 1 punto: $\zeta = 0 \rightarrow x_{g1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} 0,000000 = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx \approx \frac{\pi}{2} [2 \text{sen}(\frac{\pi}{2})] = 3,1416$$

Con 2 puntos: $\zeta = \pm \sqrt{1/3} \rightarrow x_{g1,2} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} = 1,5708 \pm 0,9069$

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx \approx \frac{\pi}{2} [1 \text{sen}(0,6639) + 1 \text{sen}(2,4777)] = 1,9358$$

Con 3 puntos: $\zeta_{1,3} = \pm \sqrt{3/5} \rightarrow x_{g1,3} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} = 1,5708 \pm 1,2167$, $\zeta_2 = 0 \rightarrow x_{g2} = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx \approx \frac{\pi}{2} [5/9 \text{sen}(0,3541) + 8/9 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) + 5/9 \text{sen}(2,7875)] = 2,0014$$