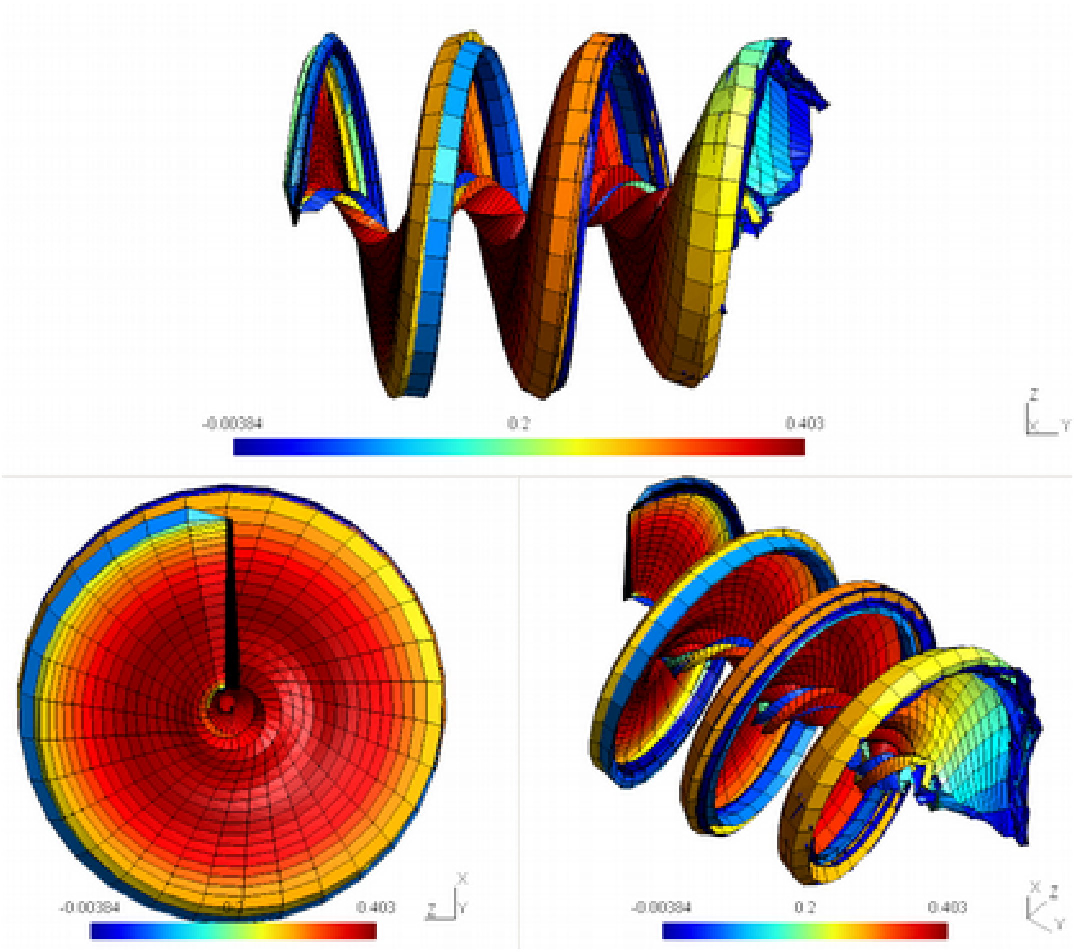
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

Aula Virtual
http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico

Unidad 8a: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de valores iniciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Introducción a ecuaciones diferenciales
- Métodos numéricos para la solución de EDO de valores iniciales
- Método de Euler simple
- Métodos mejorados de un paso: Heun y punto medio
- Familia de métodos Runge Kutta
- Métodos predictor-corrector
- Sistema de EDOs de primer orden
- Reducción a sistemas de EDO de primer orden

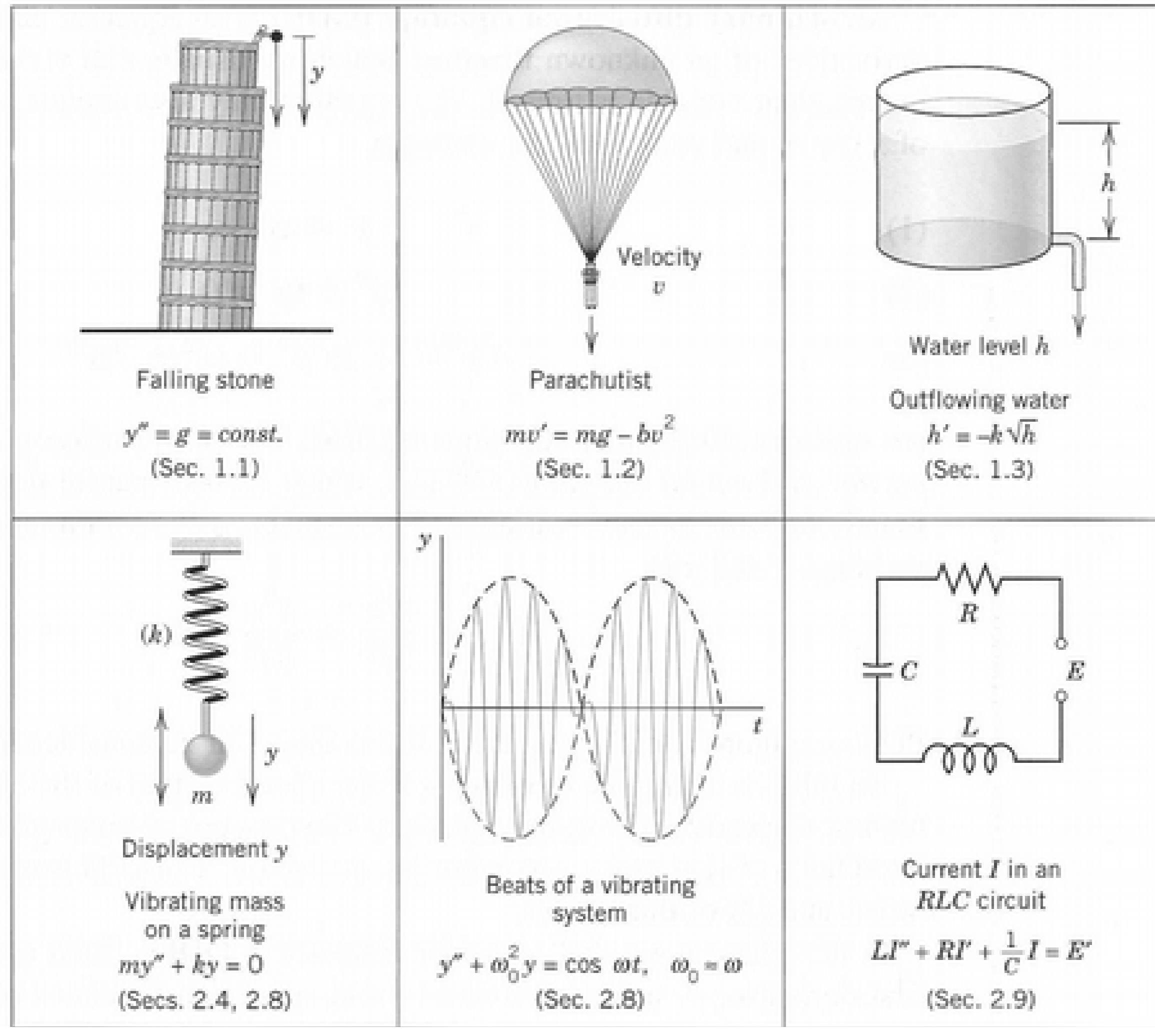
Introducción a ecuaciones diferenciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Una ecuación diferencial es aquella que **posee derivadas de una función desconocida**.

Si solamente posee **una variable** se denomina ecuación diferencial ordinaria (**EDO**). Si posee **más de una variable** se denomina ecuación diferencial en derivadas parciales (**EDP**).

Si solamente posee **derivadas primeras** se denomina ecuación diferencial **de primer orden**.



Kreyzig E, "Advanced Engineering Mathematics" 9Ed

Introducción a ecuaciones diferenciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Las EDO de **primer orden siempre son de valor inicial**

$$\frac{du(t)}{dt} + A\,u(t) = 0$$

$$u(t_0) = U_0$$

Las EDO de orden superior pueden ser de valor inicial o de contorno

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + A\,u(t) = 0$$

$$u(t_0) = U_0, \frac{du}{dt}(t_0) = v_0$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0, x \in [0,1]$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0$$

Para que exista una única solución (problema bien definido), **la cantidad de condiciones debe ser igual al orden de la ecuación diferencial**.

Métodos numéricos para resolver EDO de valores iniciales

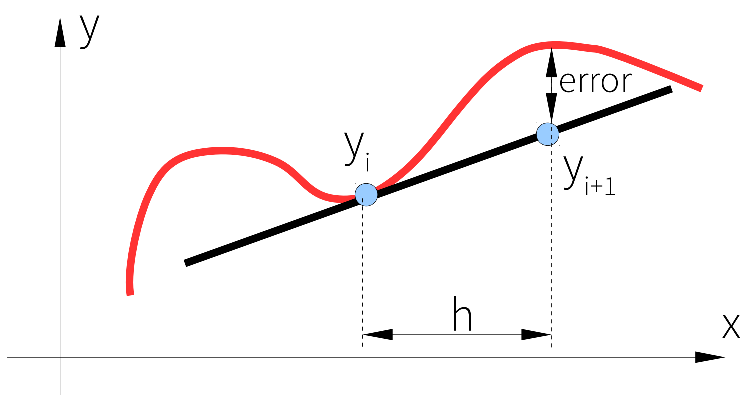
Se busca resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Los métodos de un paso extrapolan el valor de la imagen a partir de una **aproximación de la pendiente ϕ**. En general se pueden expresar de la siguiente forma

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Los métodos de un paso utilizan esta fórmula recursivamente a partir de un valor inicial y avanzan de a un paso a la vez. En cada paso, van agregando error numérico.



Método de Euler simple

Asumiendo que la derivada es constante en el intervalo h, se puede aproximar su valor a partir de la función f(x,y) **evaluada en el extremo inicial (xi,yi)**.

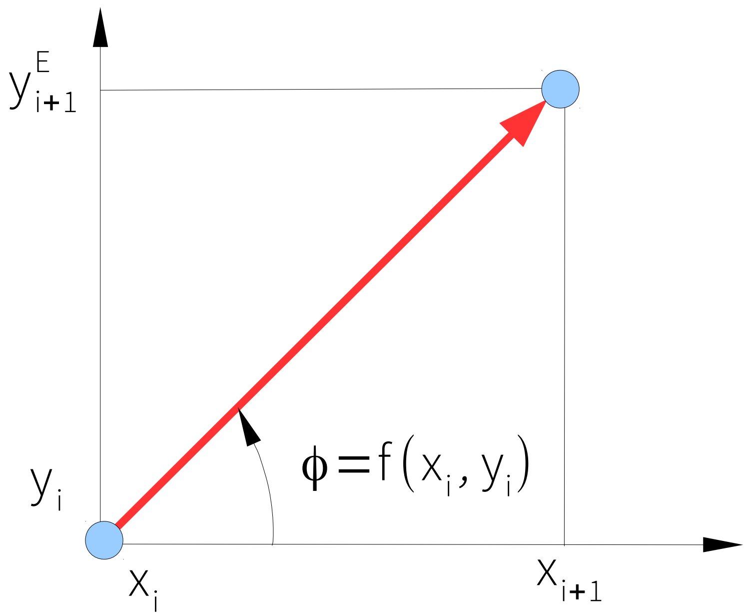
$$\phi = f(x_i, y_i) \rightarrow y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Esta fórmula se conoce como el método de Euler Simple. Geométricamente se puede asociar a una recta cuya pendiente es la derivada en el extremo inicial.

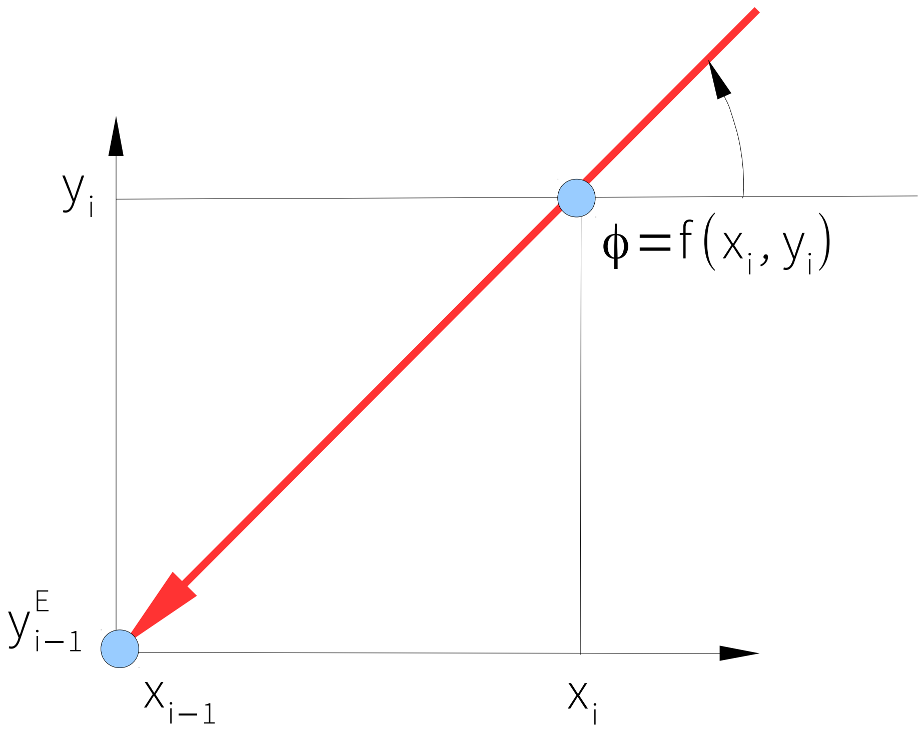
Utilizando el método de expansión por series de Taylor se puede observar que **el método es de primer orden**, es decir es O(h).

A pesar de ser un método de primer orden, su sencillez hace del método de Euler una herramienta muy utilizada en soluciones numéricas.

Algoritmo

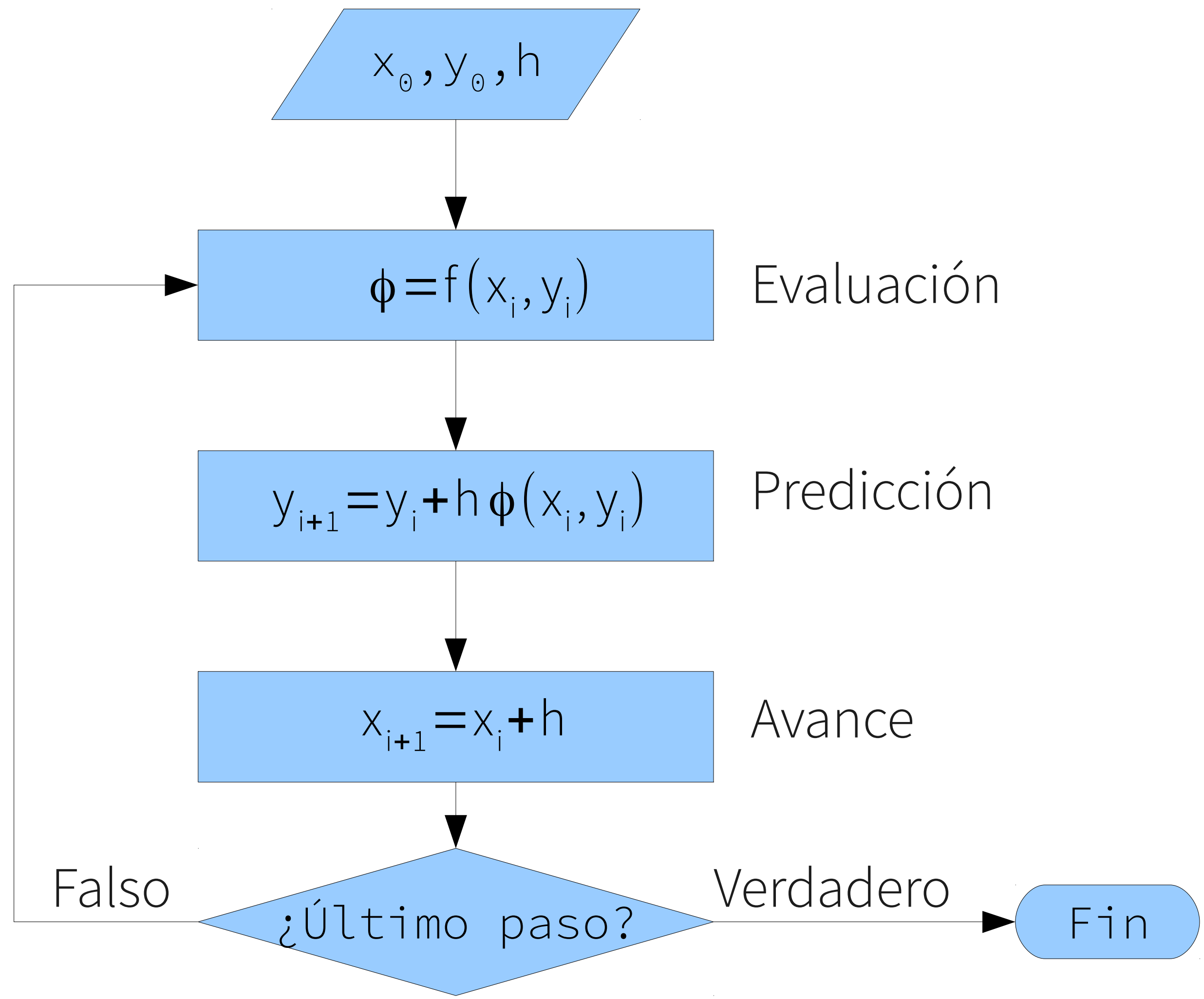


Euler hacia adelante



Euler hacia atrás

Algoritmo


x_0, y_0, h
$\phi = f(x_i, y_i)$
Evaluación
$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x_i, y_i)$
Predicción
$x_{i+1} = x_i + h$
Avance
Falso
¿Último paso?
Verdadero
Fin

Ejemplo 1

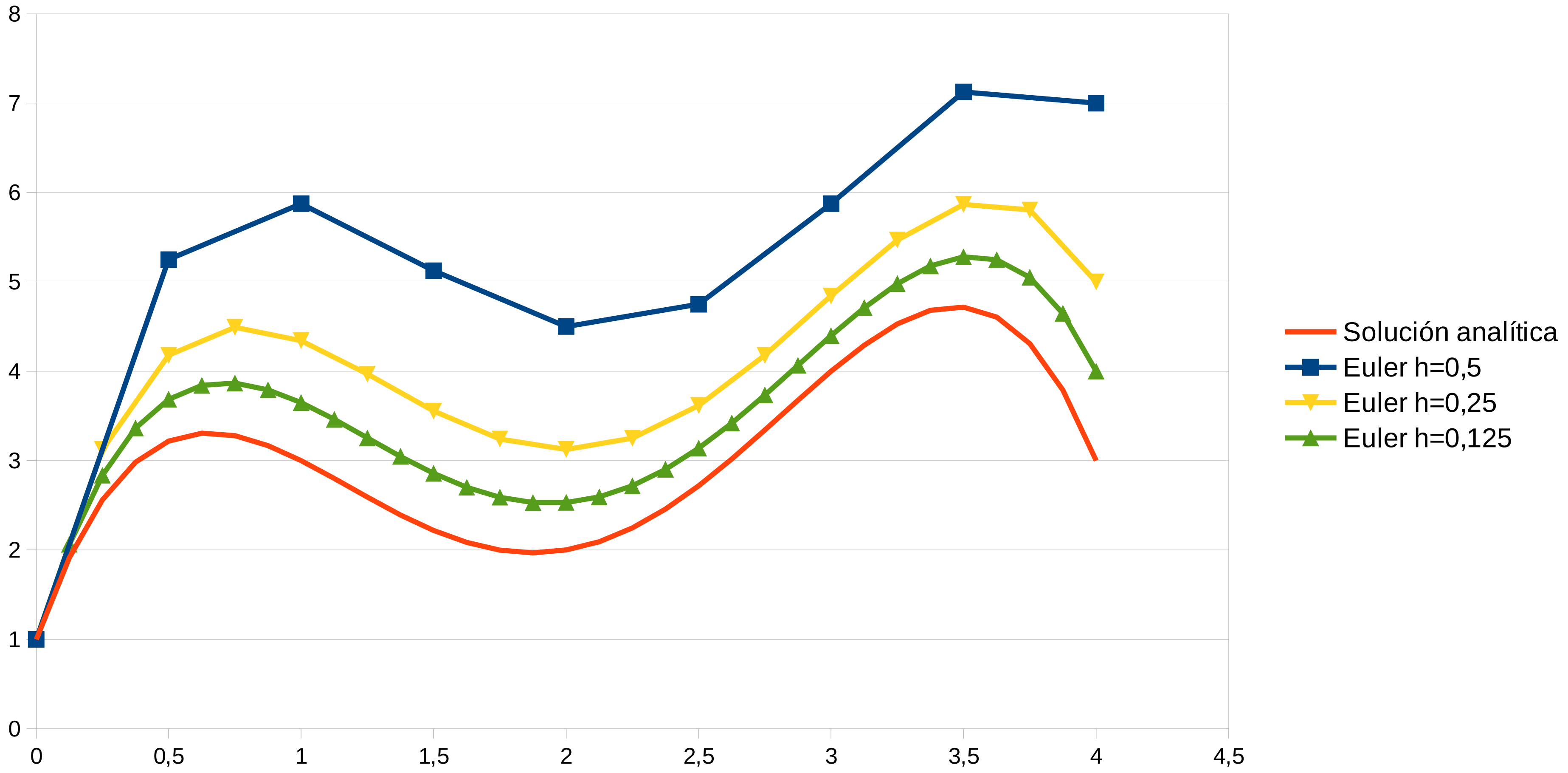
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Utilizando el método de Euler integre numéricamente la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5 \quad \text{con } x \in [0{,}4] \wedge y(0) = 1$$

xi	$y_{analitica}$	ϕ=f(xi,yi)	Y_1 (h=0,5)	ϕ=f(xi,yi)	Y_2 (h=0,25)	ϕ=f(xi,yi)	Y_3 (h=0,125)
0	1	8,5	1	8,5	1	8,5	1
0,125	1,9139404297	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	6,18359375	2,0625
0,25	2,560546875	[redacted]	[redacted]	4,21875	3,125	4,21875	2,8354492188
0,375	2,9822998047	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	2,58203125	3,3627929688
0,5	3,21875	1,25	5,25	1,25	4,1796875	1,25	3,685546875
0,625	3,3065185547	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	0,19921875	3,841796875
0,75	3,279296875	[redacted]		-0,59375	4,4921875	-0,59375	3,8666992188
0,875	3,1678466797	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	-1,15234375	3,7924804688
1	3	-1,5	5,875	-1,5	4,34375	-1,5	3,6484375

Ejemplo 1



8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
Solución analítica
Euler h=0,5
Euler h=0,25
Euler h=0,125

Métodos mejorados de un paso

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Métodos de un solo paso

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y)$$

Ecuación de una recta con pendiente ϕ. ¿Cuál es la mejor aproximación de ϕ?

Euler simple

$$\phi(x,y) = f(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y)$$

Φ es la pendiente en el inicio del intervalo
Se obtiene error O(h)

Método de Heun

$$\phi(x,y) = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^E_{i+1})}{2}$$
$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y)$$

Φ es el promedio de la pendiente en el inicio y en el final del intervalo. Se obtiene error O(h^2)

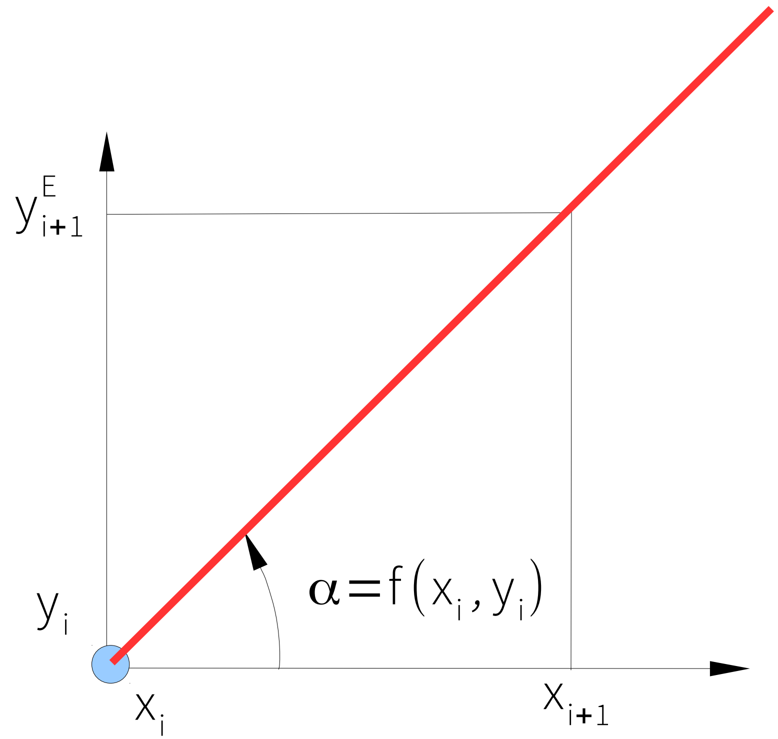
Método de punto medio

$$\phi(x,y) = f(x_{i+1/2}, y^E_{i+1/2})$$
$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y)$$

Φ es la pendiente en el centro del intervalo. Se obtiene error O(h^2)

Método de Heun

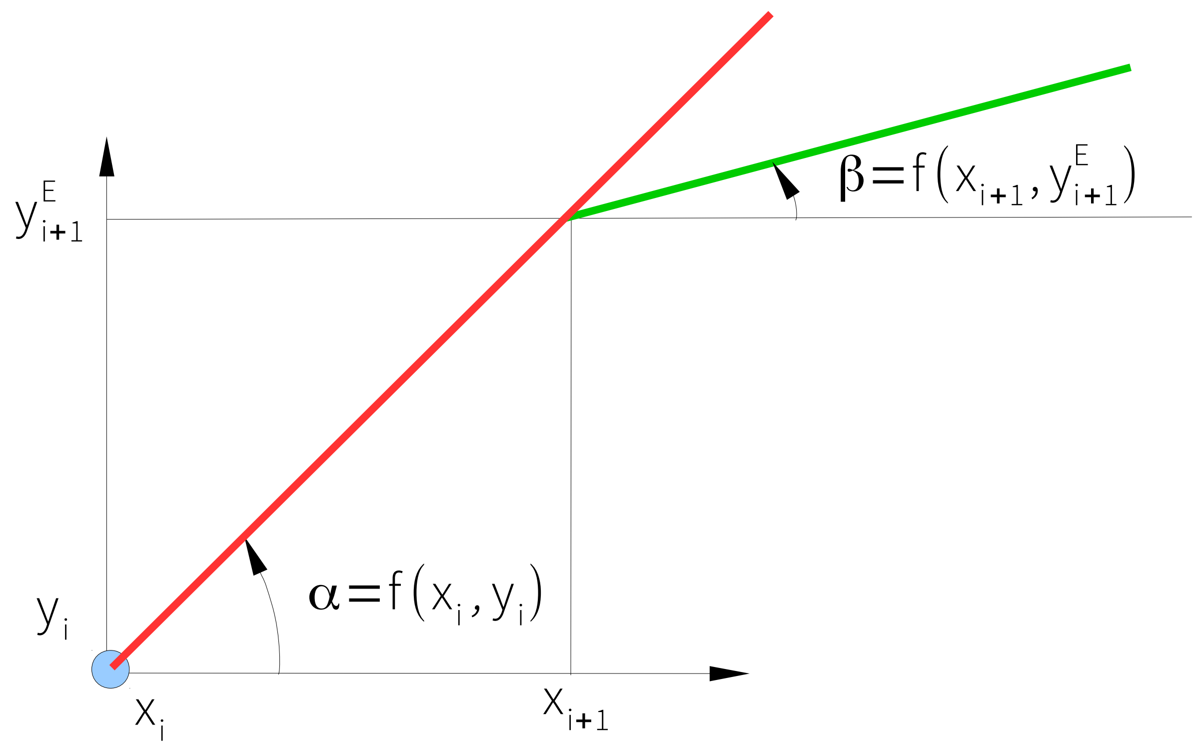
Primer paso, Euler simple



Método de Heun

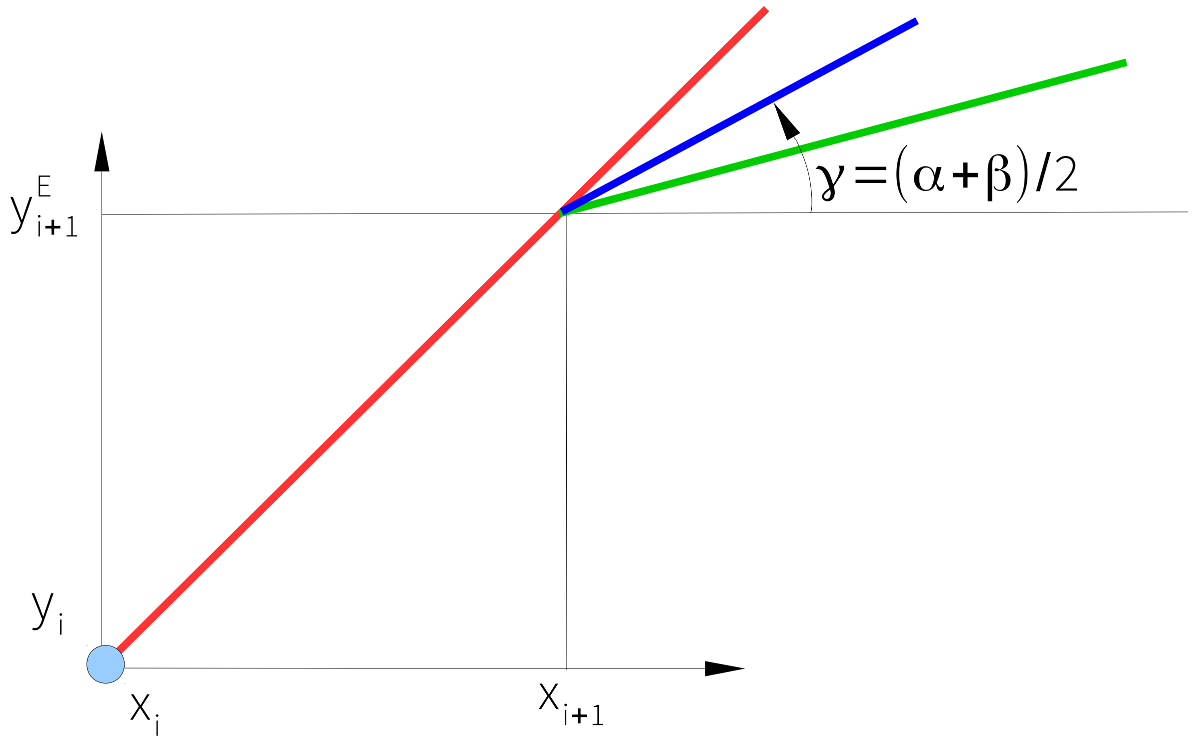
FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Segundo paso, evaluar pendiente en predicción de Euler simple



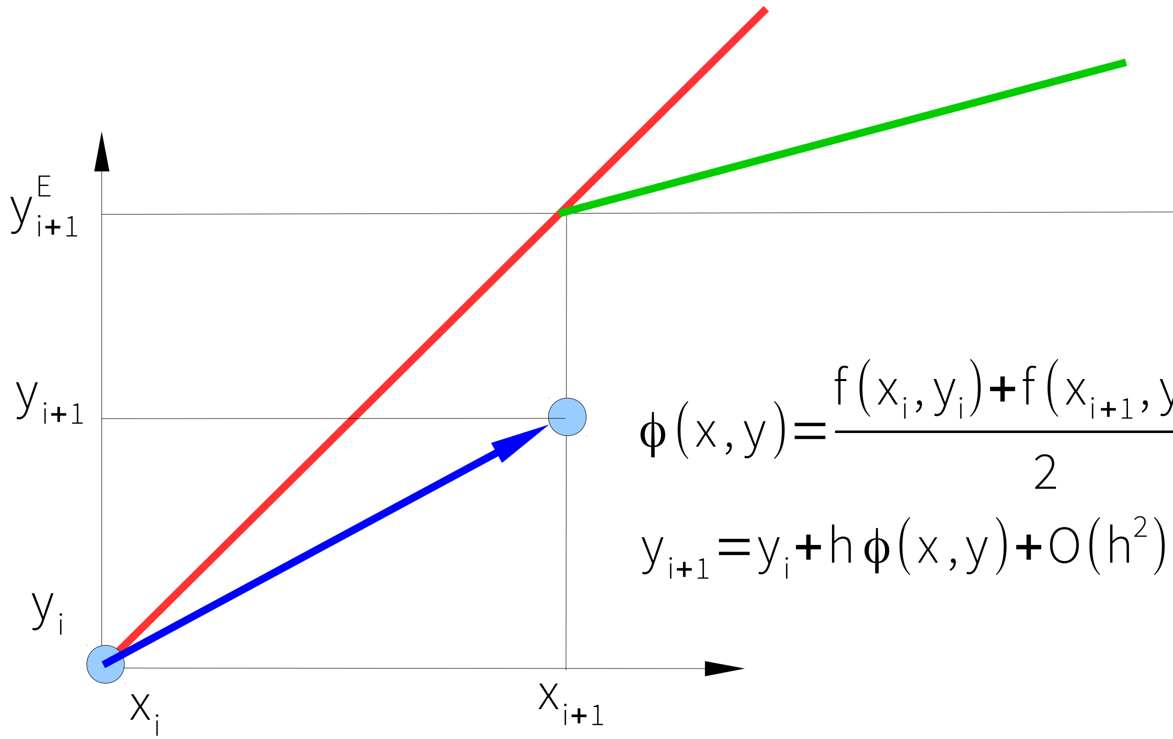
Método de Heun

Tercer paso, promediar pendientes



Método de Heun

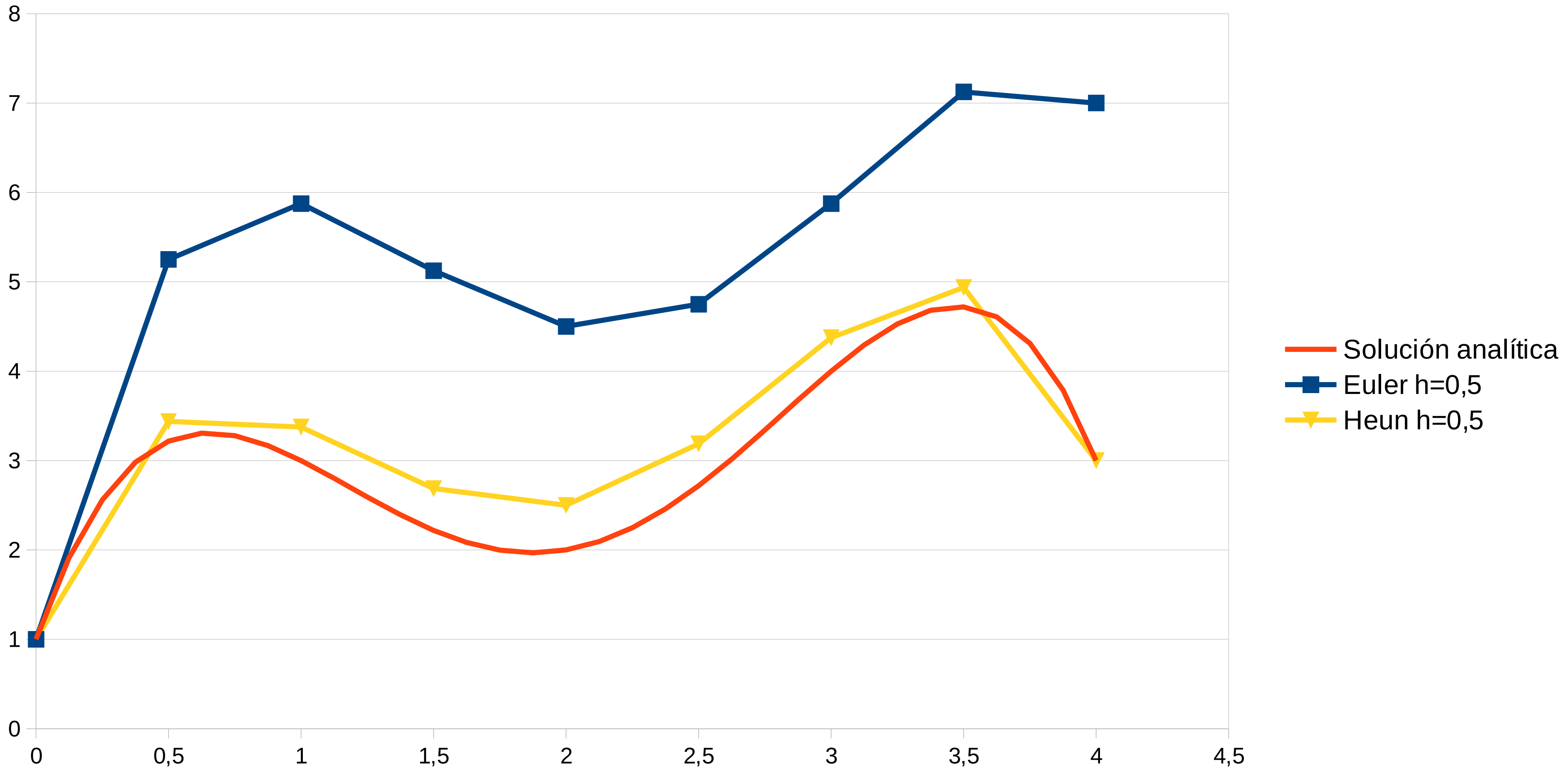
Cuarto paso, avanzar con pendiente promediada



$$\phi(x,y)=\frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y^E_{i+1})}{2}$$

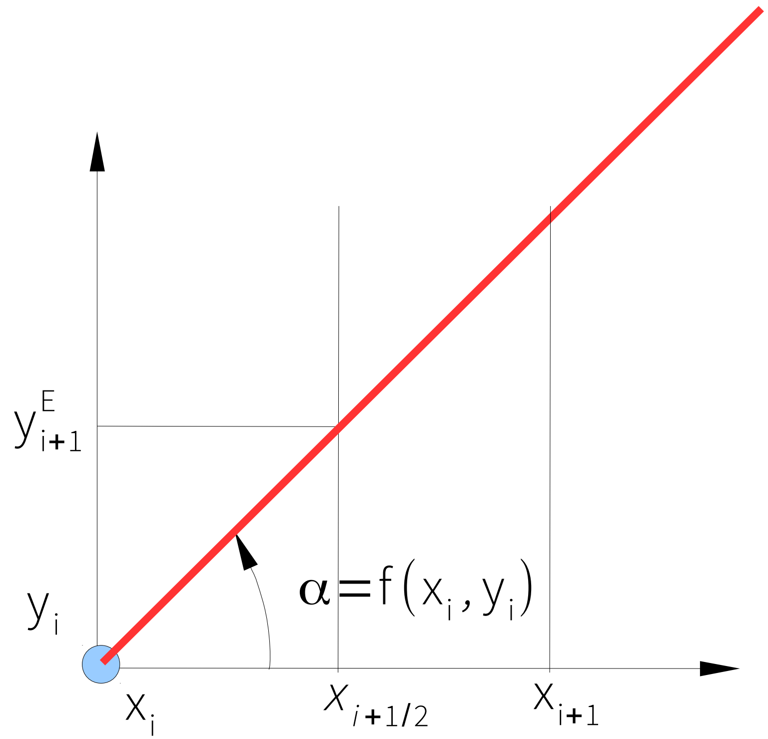
$$y_{i+1}=y_i+h\,\phi(x,y)+O(h^2)$$

Comparación para Ejemplo 1



Método del punto medio

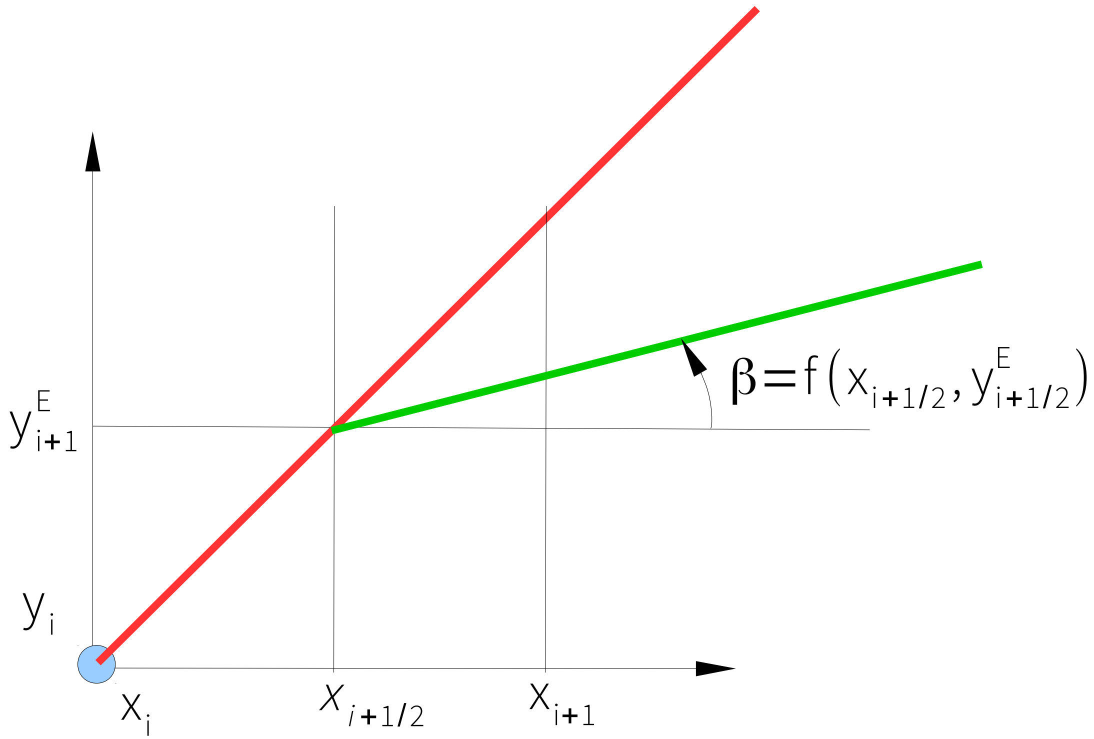
Primer paso, Euler simple
hasta la mitad del paso



Método del punto medio

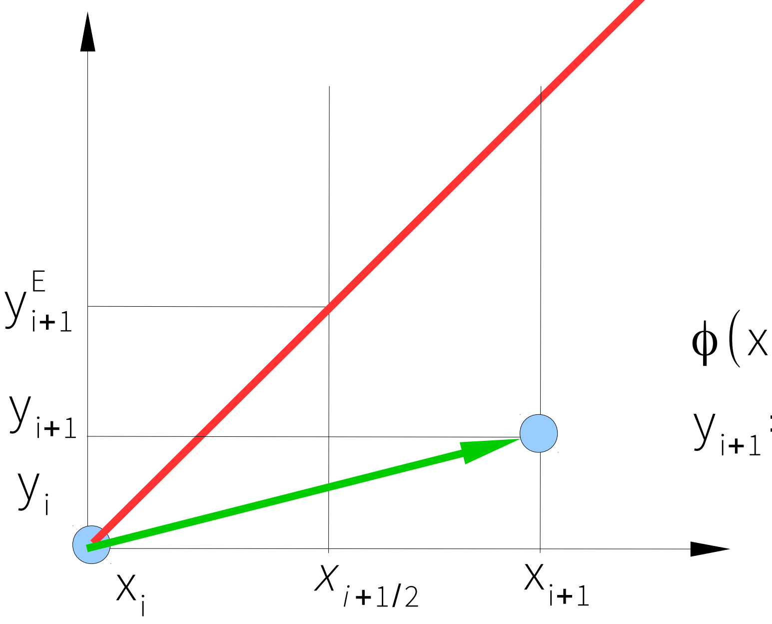
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Segundo paso, evaluar pendiente en predicción de Euler simple



Método del punto medio

Tercer paso, avanzar con pendiente β



$$\phi(x,y)=f(x_{i+1/2},y^E_{i+1/2})$$

$$y_{i+1}=y_i+h\,\phi(x,y)+O(h^2)$$

Métodos Runge Kutta

Generalización de métodos $O(h^2)$

Familia Runge-Kutta 2 o RK2

$$\phi(x_i, y_i, h) = (1-\omega)k_1 + \omega k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\omega}, y_i + \frac{h}{2\omega} k_1\right)$$

$$\omega = 1/2$$

$$\phi(x_i, y_i, h) = (1/2)k_1 + 1/2\, k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1)$$

Método de Heun

$$\omega = 1$$

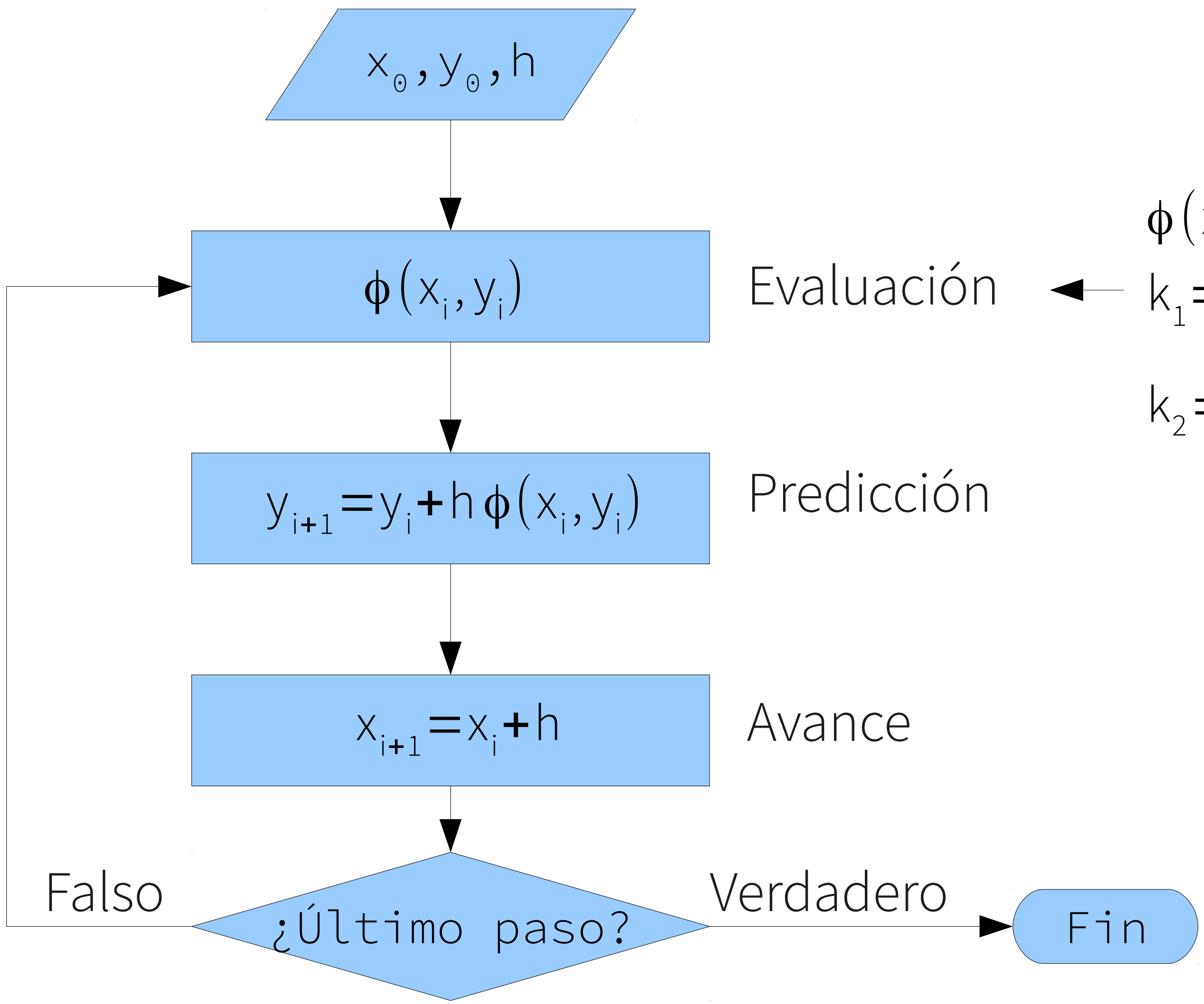
$$\phi(x_i, y_i, h) = k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

Método de punto medio

Algoritmo



$$\phi(x_i, y_i, h) = (1-\omega) k_1 + \omega k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\omega}, y_i + \frac{h}{2\omega} k_1\right)$$

Código Octave

```
function [x,y]=RK2(x0,y0,xn,h)
% Solucion de EDO de primer orden con Runge Kutta 2
% Uso: [x,y]=RK2(x0,y0,xn,h)
% Entradas: x0=posición inicial, y0=condición inicial
%             xn= posición final, h=paso de integración
% Salidas:    x=vector de posiciones
%             y=vector de solución para cada x

npasos=ceil((xn-x0)/h); %Redondea para arriba
x(1)=x0;
y(1)=y0;

for i=1:npasos
    %Evaluación con función externa
    FI=evalFI(x(i),y(i),h);
    %Predicción
    y(i+1)=y(i)+h*FI;
    %Avance
    x(i+1)=x(i)+h;
end

end
```

Funciones auxiliares

```
function [f]=evalfun(x,y)
%Evaluación de la función
f=%colocar f(x,y)%;
end
```

```
function [FI]=evalFI(x,y,h)
%Evaluación de la pendiente Φ
w=1; %1/2 Heun, 1 Punto medio
k1=evalfun(x,y);
k2=evalfun(x+h/(2*w),y+h/(2*w)*k1);
FI=(1-w)*k1+w*k2;
end
```

Ejemplo 2

$$\frac{dy}{dx}+y=0, x_0=0, y_0=10$$

Evaluar en $x_n=0,6$

utilizar $h_1=0.1, h_2=0.3, h_3=0.6$

Comparar con solucion exacta: $y=10\,e^{-x}$

En este caso f(x,y)= - y

```
x0=0;
y0=10;
xn=0,6;
[x1,y1]=RK2(x0,y0,xn,0.1);

[x2,y2]=RK2(x0,y0,xn,0.3);

[x3,y3]=RK2(x0,y0,xn,0.6);

yexacto=10*exp(-x1);

plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x1,yexacto)

legend('paso 0.1','paso 0.3','paso 0.6','exacto')
```

Ejemplo 3

$$\frac{dy}{dt}+1/2y=1/2t, y(0)=4$$

Evaluar entre 0 y 10

En este caso f(t,y)= 1/2t - 1/2y

```
t0=0;
y0=4;
tn=10;
[t1,y1]=RK2(t0,y0,tn,1);

[t2,y2]=RK2(t0,y0,tn,0.5);

[t3,y3]=RK2(t0,y0,tn,0.25);

yexacto=6*exp(-t3/2)-2+t3;

plot(t1,y1,t2,y2,t3,y3,t3,yexacto)

legend('paso 1','paso 0.5','paso 0.25','exacto')
```

Ejemplo 4

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 2x - 1, y(0) = 2$$

Evaluar entre 0 y 1

En este caso f(t,y)= -2x+2y-1

```
x0=0;
y0=2;
xn=1;
[x1,y1]=RK2(x0,y0,xn,0.1);

[x2,y2]=RK2(x0,y0,xn,0.05);

[x3,y3]=RK2(x0,y0,xn,0.025);

yexacto=exp(2*x3)+x3+1;

plot(t1,y1,t2,y2,t3,y3,t3,yexacto)

legend('paso 1','paso 0.5','paso 0.25','exacto')
```

Métodos predictor-corrector

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se realiza en tres etapas.

1) Etapa de **predicción** $y_{i+1}^{p} = y_i + \phi(x_i, y_i)h$

2) Etapa de **evaluación** $\phi(x_{i+1}, y_{i+1}^{p})$

3) Etapa de **corrección** $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[\phi(x_i, y_i) + \phi(x_{i+1}, y_{i+1}^{p})]$

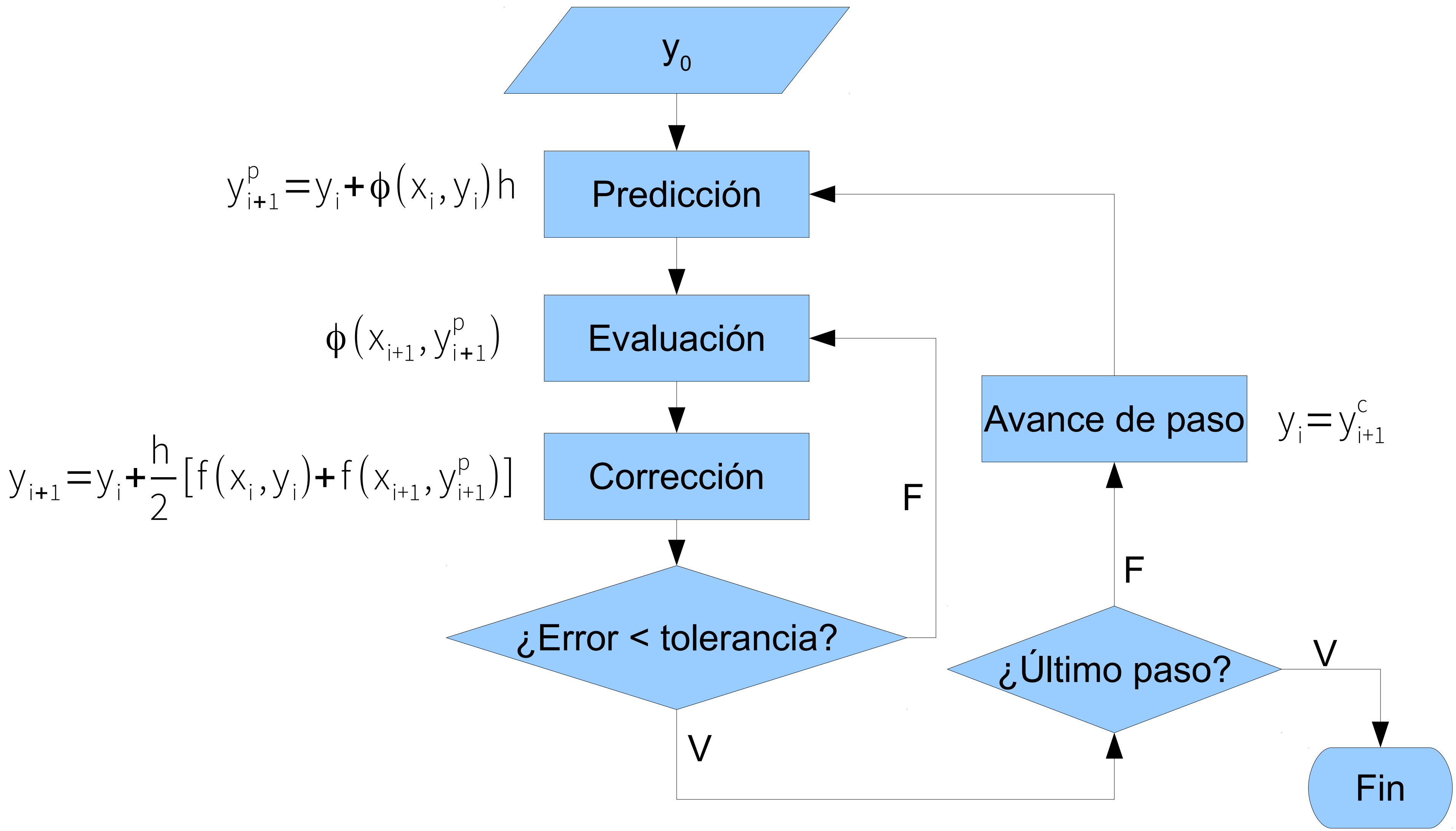
evaluación del error

Si error > tolerancia repetir correción

Este esquema de integración se conoce como **método predictor-corrector**. Es un método **robusto**. **En general es más lento** que los de un solo paso.

Existen muchas fórmulas para las etapas de predicción y corrección. Si se usa la fórmula de Euler simple para predecir y la del trapecio para corregir, el método es "**simpléctico**" (no produce amortiguamiento numérico).

Métodos predictor-corrector



Sistema de EDO de primer orden con valores iniciales

$$\frac{dy_1}{dt} = -10y_1(t) + 4y_2(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -4y_1(t) + 0y_2(t)$$

$$y_1(0) = 5, y_2(0) = 3$$

Evaluar entre 0 y 0.05

1)Expresar en forma matricial para determinar f(t,y1,y2)

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \dot{Y} = A \cdot Y = f(Y)$$

2) Evaluar $\phi(t, y_1, y_2)$

$$\phi(t_i, y_{1i}, y_{2i}, h) = (1-\omega)k_1 + \omega k_2$$

$$k_1 = f(t_i, y_{1i}, y_{2i}) = A \cdot Y_i$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2\omega}, Y_i + \frac{h}{2\omega} k_1\right)$$

3) Predecir nuevo valor

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_{1i}, y_{2i})$$

Sistema de EDO de primer orden con valores iniciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

```
function [x,y1,y2]=RK2_sis(x0,y10,y20,xn,h)
% Solucion de sistemas de EDO de primer orden
% Uso: [x,y1,y2]=RK2_sis(x0,y10,y20,xn,h)
% Entradas: x0=posición inicial, y10=condición inicial 1
%               y10=condición inicial 2
%                xn= posición final, h=paso de integración
% Salidas:    x=vector de posiciones
%                y1=vector de solución1 para cada x
%                y2=vector de solución2 para cada x
npasos=ceil((xn-x0)/h); %Redondea para arriba
x(1)=x0;
y(1,1)=y10;
y(2,1)=y20;
for i=1:npasos
    %Evaluación con función externa
    FI=evalFI_sis(x(i),y(1,i),y(2,i),h);
    %Predicción
    y(:,i+1)=y(:,i)+h*FI;
    %Avance
    x(i+1)=x(i)+h;
end
y1=y(1,:);
y2=y(2,:);
end
```

Funciones auxiliares

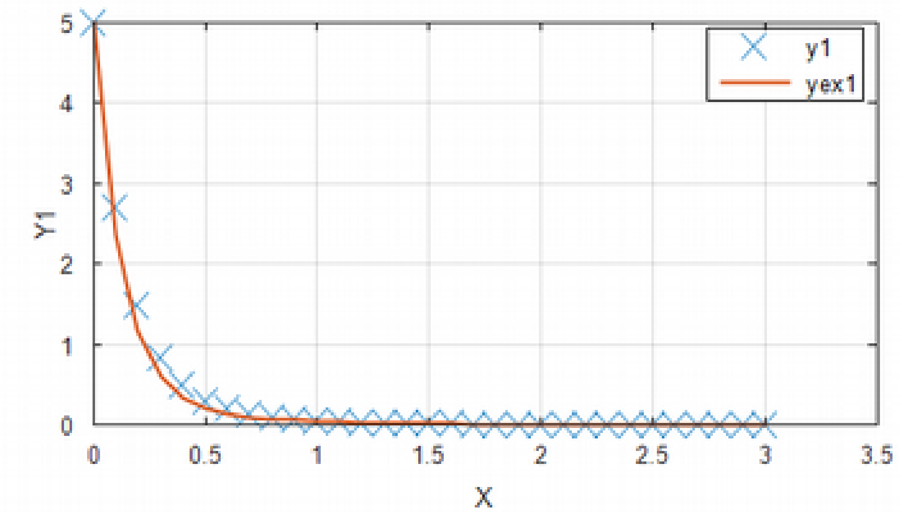
```
function [f]=evalfun_sis(x,y)
%Evaluación de la función
f=[-10,4;-4,0]*y; %A*y
end
```

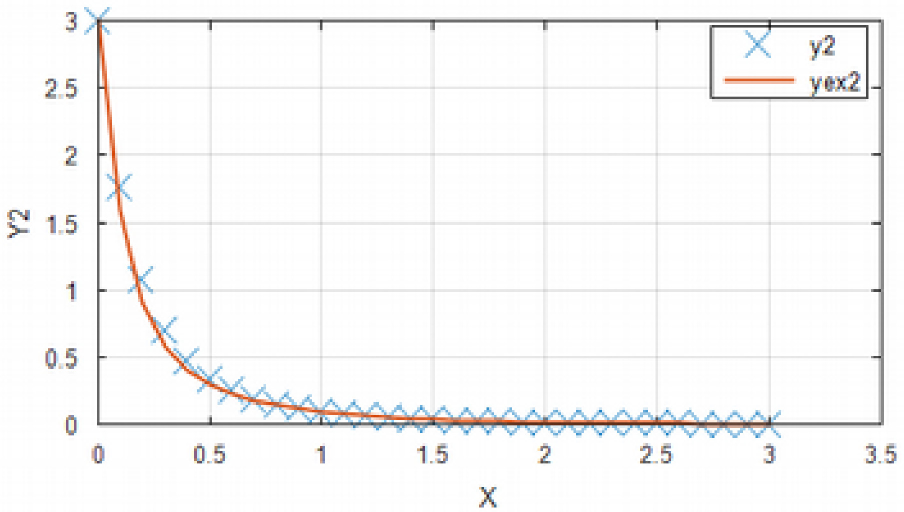
```
function [FI]=evalFI_sis(x,y1,y2,h)
%Evaluación de la pendiente Φ
y=[y1;y2];
w=1; %1/2 Heun, 1 Punto medio
k1=evalfun_sis(x,y);
k2=evalfun_sis(x+h/(2*w),y+h/(2*w)*k1);
FI=(1-w)*k1+w*k2;
end
```

Ejemplo 5

Script RK2_sis_script.m

```
clc;
clear all

%Datos iniciales
x0=0;
y10=5;
y20=3;
xn=3;
Dx=0.1;

%Solucion numérica
[x,y1,y2]=RK2_sis(x0,y10,y20,xn,Dx);

%Solucion exacta
yex=1/3*[1;2]*exp(-2*x)+14/3*[1;1/2]*exp(-8*x);

%Gráficos
subplot (1,2,1)
plot(x,y1,'x',x,yex(1,:),'-')
legend('y1','yex1')
subplot (1,2,2)
plot(x,y2,'x',x,yex(2,:),'-')
legend('y2','yex2')
```





Reducción a sistemas de EDO de primer orden

Las EDO de orden superior se pueden transformar a un sistema de EDOs de primer orden.

Para ello se debe realizar un cambio de variables donde cada variable nueva representa una derivada de distinto orden de la variable original.

Por ejemplo, la ecuación de un sistema masa-resorte $m\ddot{x}+kx=f$

Proponemos el siguiente cambio de variable $z_1=x, z_2=\dot{x}$

Agrupamos las variables en un vector $\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

Derivamos una vez el vector $\dot{\mathbf{Z}}=\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$

Reemplazamos la derivada segunda con la EDO original y expresamos todo en función de los componentes de Z $\dot{\mathbf{Z}}=\begin{pmatrix} z_2 \\ m^{-1}(f-kz_1) \end{pmatrix}=\mathbf{F}(z_1,z_2)$

Ejemplo 6

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Péndulo simple

$$\ddot{\theta}(t)+\frac{g}{L}\cos\theta(t)=0$$

$$\theta(0)=\theta_{0,}\,\dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0$$

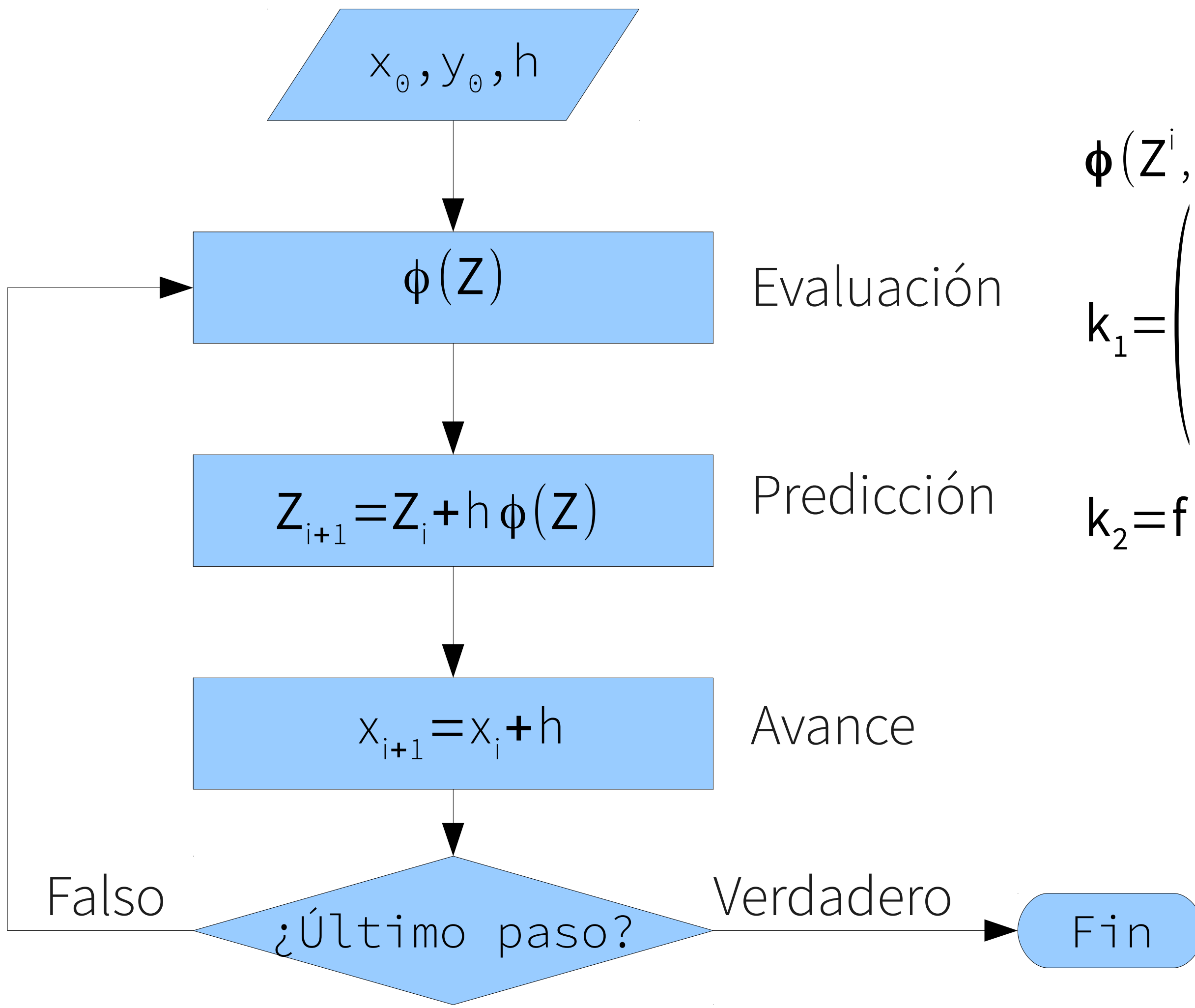
Transformación de una ecuación de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$Z=\begin{pmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}\rightarrow\dot{Z}=\begin{pmatrix}z_2\\ -\frac{g}{L}\cos z_1\end{pmatrix}=F(Z)$$

Para evaluar se usa $F(Z)$

Se predice el nuevo valor con: $Z^{t+1}=Z^t+h\,F(Z)$

Ejemplo 6



$$\phi(Z^i,h)=(1-\omega)k_1+\omega k_2$$

$$k_1=\begin{pmatrix} Z_2^i \\ -\frac{g}{L}\cos Z_1^i \end{pmatrix}$$

$$k_2=f\left(x_i+\frac{h}{2\omega},y_i+\frac{h}{2\omega}k_1\right)$$

Sistema de EDO de primer orden con valores iniciales

```
function [x,y1,y2]=RK2_sis(x0,y10,y20,xn,h)
% Solucion de sistemas de EDO de primer orden
% Uso: [x,y1,y2]=RK2_sis(x0,y10,y20,xn,h)
% Entradas: x0=posición inicial, y10=condición inicial 1
%                y10=condición inicial 2
%                xn= posición final, h=paso de integración
% Salidas:    x=vector de posiciones
%                y1=vector de solución1 para cada x
%                y2=vector de solución2 para cada x
npasos=ceil((xn-x0)/h); %Redondea para arriba
x(1)=x0;
y(1,1)=y10;
y(2,1)=y20;
for i=1:npasos
    %Evaluación con función externa
    FI=evalFI_sis(x(i),y(1,i),y(2,i),h);
    %Predicción
    y(:,i+1)=y(:,i)+h*FI;
    %Avance
    x(i+1)=x(i)+h;
end
y1=y(1,:);
y2=y(2,:);
end
```

Solo hay que modificar la función de evaluación

```
function [f]=evalfun_sis(x,y)
%Evaluación de la función
L=1; %longitud del pendulo
f=[y(2,1);-9.81/L*cos(y(1,1))];
end
```

```
function [FI]=evalFI_sis(x,y1,y2,h)
%Evaluación de la pendiente Φ
y=[y1;y2];
w=1; %1/2 Heun, 1 Punto medio
k1=evalfun_sis(x,y);
k2=evalfun_sis(x+h/(2*w),y+h/(2*w)*k1);
FI=(1-w)*k1+w*k2;
end
```

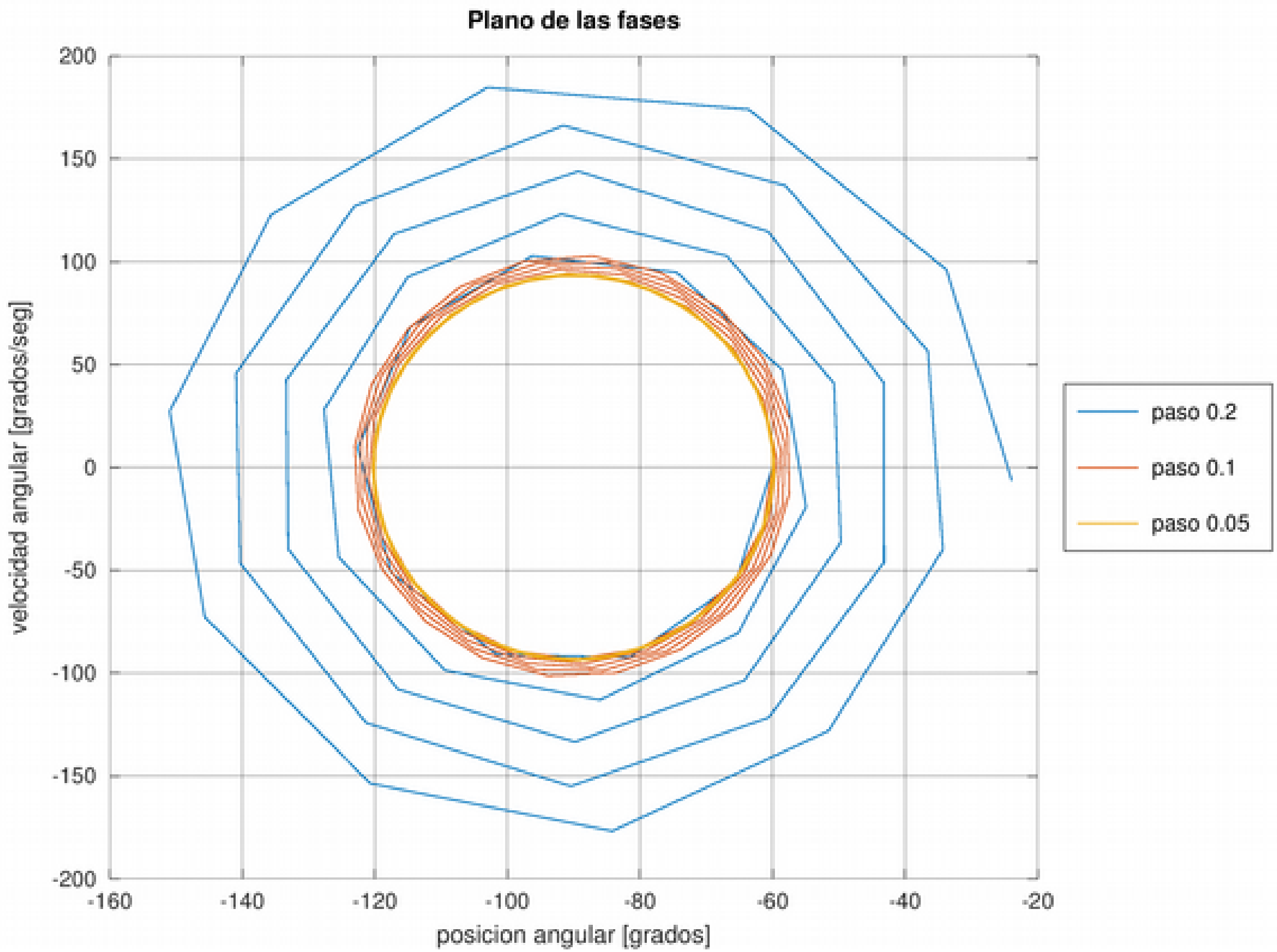
Ejemplo 6

```
t0=0;pos0=-pi/3;vel0=0;tf=10;
[t,pos1,vel1]=RK2_sis(t0,pos0,vel0,tf,0.2);
[t,pos2,vel2]=RK2_sis(t0,pos0,vel0,tf,0.1);
[t,pos3,vel3]=RK2_sis(t0,pos0,vel0,tf,0.05);
%Conversion a grados
Z1=[pos1;vel1]*180/pi;
Z2=[pos2;vel2]*180/pi;
Z3=[pos3;vel3]*180/pi;
subplot(1,2,1)
plot(Z1(1,:),Z1(2,:),Z2(1,:),Z2(2,:),Z3(1,:),Z3(2,:))
legend('paso 0.2','paso 0.1','paso 0.05')
title('Plano de las fases')
xlabel('posicion angular [grados]')
ylabel('velocidad angular [grados/seg]')
grid on
subplot(1,2,2)
plot(t0:0.2:tf,Z1(1,:),t0:0.1:tf,Z2(1,:),t0:0.05:tf,Z3(1,:))
legend('paso 0.2','paso 0.1','paso 0.05')
title('Evolucion temporal')
xlabel('tiempo')
ylabel('posicion angular [grados]')
grid on
```

Ejemplo 6

A medida que reducimos el paso h, se reduce el error numérico y la solución discreta converge a la analítica.

El péndulo ideal conserva su energía y describe una elipse perfecta en el plano de las fases.



Ejemplo 6

Inspeccionemos más de cerca la evolución temporal.

Los métodos de un paso utilizan la pendiente de la solución para estimar el valor siguiente.

Se puede ver que la tangente de la solución cambia rápidamente en la cercanía de los picos y se produce el mayor error.