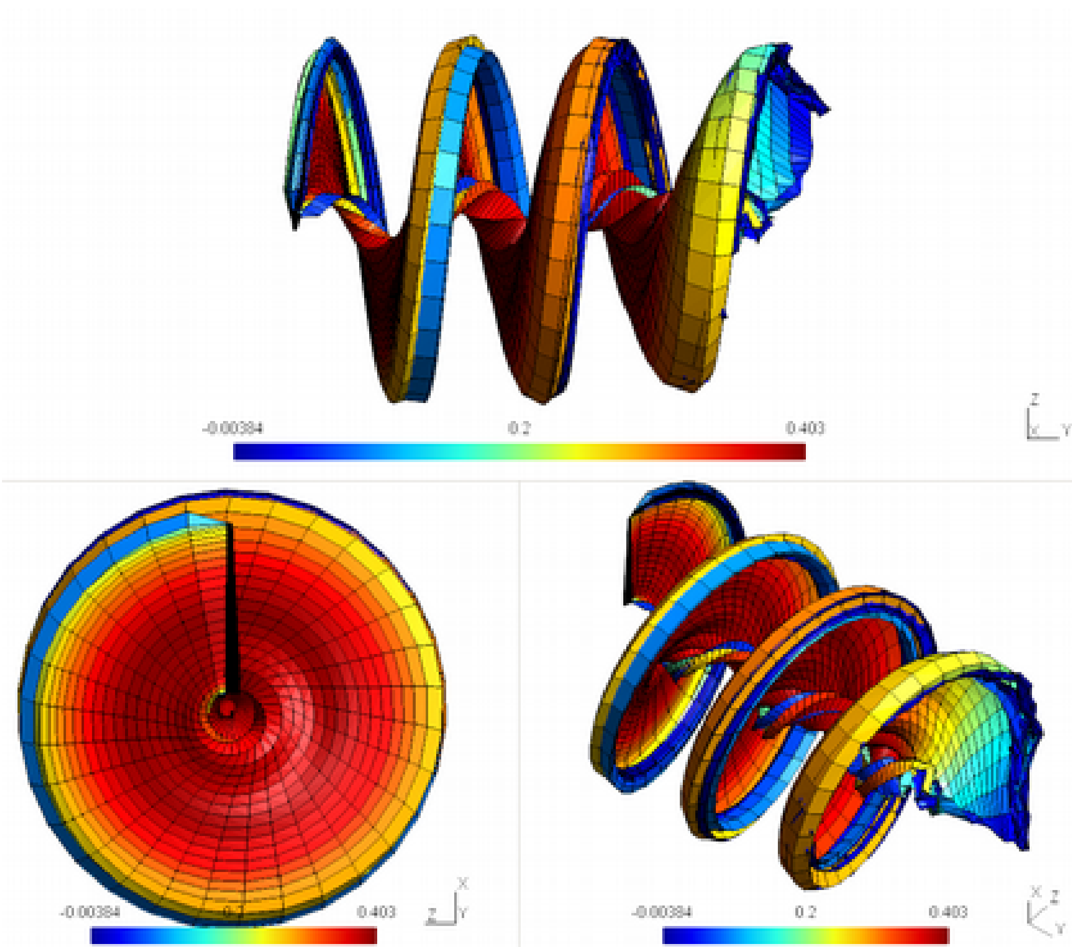
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

Aula Virtual
http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico

Unidad 8b: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de valores de contorno

Temario

- Introducción a EDO de contorno
- Método de las diferencias finitas
- Ejemplo
- Ejemplo de solución de EDP

Introducción a EDO de contorno

Se busca resolver ecuaciones diferenciales ordinarias ("EDO") con condiciones de contorno. Por ejemplo:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+\frac{d f(x)}{dx}+f(x)=0\text{, con } x\in\Re\wedge 0\leq x\leq 1$$
$$f(0)=0, f(1)=0$$

El máximo orden de las derivadas nos da el orden de la ecuación y a su vez, nos indica la cantidad de condiciones necesarias para que exista la solución.

En el caso anterior, la ecuación es de 2º orden y necesita 2 condiciones de borde, una por cada extremo del dominio.

Método de las diferencias finitas

Primero se transforma la ecuación continua en una **fórmula computacional**, **aproximando cada derivada** por una aproximación numérica del mismo orden de error. Por lo general se utilizan derivadas $O(h^2)$.

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

Reemplazando las derivadas en la EDO original se obtiene la fórmula computacional.

$$\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + f(x_i) + O(h^2) = 0$$

$$\left(1 - \frac{h}{2}\right) f_{i-1} + \left(h^2 - 2\right) f_i + \left(1 + \frac{h}{2}\right) f_{i+1} = 0$$

Método de las diferencias finitas

La fórmula computacional **es válida solamente en un punto x_i**. Como **se busca la solución de la EDO en todo el dominio, se "discretiza" en una cantidad de puntos.**
Luego, **se evalúa la fórmula en cada punto interior donde se busca determinar la solución.** (En este caso la EDO posee condiciones de contorno, por lo tanto ya se conoce la solución en los extremos).

Supongamos para el ejemplo que discretizamos con 5 puntos, por lo tanto $x_1=0$ y $x_5=0$ porque son los extremos conocidos.

$$\text{para } x_2=h: \left(1-\frac{h}{2}\right)f_1+\left(h^2-2\right)f_2+\left(1+\frac{h}{2}\right)f_3=0$$

$$\text{para } x_3=2h: \left(1-\frac{h}{2}\right)f_2+\left(h^2-2\right)f_3+\left(1+\frac{h}{2}\right)f_4=0$$

$$\text{para } x_4=3h: \left(1-\frac{h}{2}\right)f_3+\left(h^2-2\right)f_4+\left(1+\frac{h}{2}\right)f_5=0$$

Método de las diferencias finitas

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La solución se obtiene armando un SEL.

Para incluir las condiciones de contorno **hay dos formas**.

1) Despejar los valores conocidos en las ecuaciones que se relacionan con los extremos y ubicarlos en el vector independiente.

$$\begin{array}{l} \left(h^2-2\right)f_2+\left(1+\frac{h}{2}\right)f_3=-\left(1-\frac{h}{2}\right)f_1 \\ \left(1-\frac{h}{2}\right)f_2+\left(h^2-2\right)f_3+\left(1+\frac{h}{2}\right)f_4=0 \\ \left(1-\frac{h}{2}\right)f_3+\left(h^2-2\right)f_4=\left(1+\frac{h}{2}\right)f_5 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 \\ \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) \\ 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{h}{2}\right)f_1 \\ 0 \\ \left(1+\frac{h}{2}\right)f_5 \end{pmatrix}$$

Esta alternativa facilita la programación para **condiciones de borde del tipo Dirichlet**.

Método de las diferencias finitas

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

2) Incluir ecuaciones auxiliares para las condiciones de contorno.

$$
\begin{aligned}
&\text{para } x_1: f_1 = 0\\
&\text{para } x_2: \left(1-\frac{h}{2}\right)f_1 + \left(h^2-2\right)f_2 + \left(1+\frac{h}{2}\right)f_3 = 0\\
&\text{para } x_3: \left(1-\frac{h}{2}\right)f_2 + \left(h^2-2\right)f_3 + \left(1+\frac{h}{2}\right)f_4 = 0\\
&\text{para } x_4: \left(1-\frac{h}{2}\right)f_3 + \left(h^2-2\right)f_4 + \left(1+\frac{h}{2}\right)f_5 = 0\\
&\text{para } x_5: f_5 = 0
\end{aligned}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 & 0\\
0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0\\
0 & 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\\ f_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}
$$

Esta alternativa facilita la programación para **condiciones de borde del tipo Neumann**.

Finalmente la solución del SEL será la función solución evaluada en los puntos incógnita.

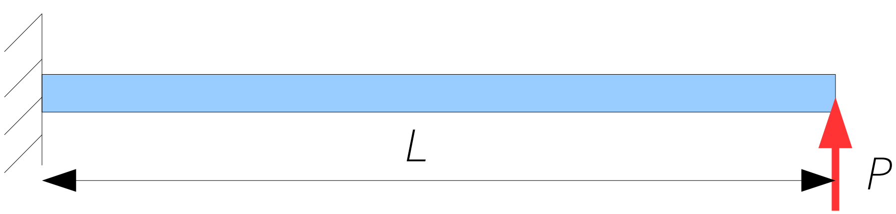
Método de las diferencias finitas

Resumen del método

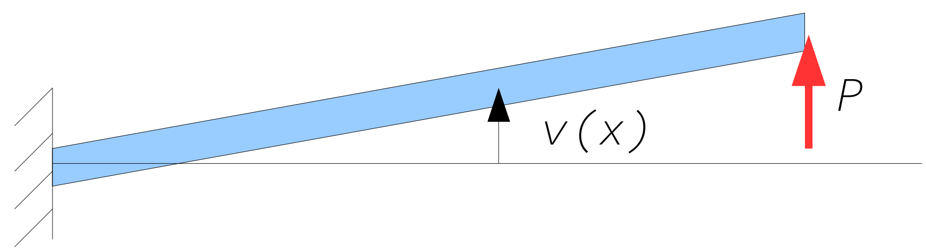
1) Reemplazar las derivadas en la EDO original por versiones discretas y encontrar la fórmula computacional
2) Discretizar el dominio continuo en n puntos
3) Plantear la fórmula computacional en los n-2 nodos interiores
4) Plantear las condiciones de borde como valores o ecuaciones adicionales
5) Resolver el SEL para determinar los valores de la función solución en los puntos discretos

Ejemplo

Se busca determinar la flecha de una viga empotrada bajo la acción de una carga P que actúa en el extremo opuesto.
Las propiedades de la viga son: EJ=10000, L=10.
La carga P es de 100.



Antes



Después

Ejemplo

La ecuación que describe este problema es la siguiente:

$$EJ\frac{d^2 v_{(x)}}{dx^2}+P(x-L)=0\,,\text{con } x\in\Re \wedge 0\leq x\leq L$$

En el extremo la flecha es nula: $v(0)=0$

En el extremo el giro de la sección es nula: $\frac{dv}{dx}(0)=0$

Para determinar la fórmula computacional hay que aproximar una derivada segunda en la EDO y una derivada primera para la segunda condición de contorno.

$$EJ\left(\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2}\right)+P(x_i-L)=0\rightarrow\left(v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}\right)+\frac{P}{EJ}h^2(x_i-L)=0$$

$$\frac{dv}{dx}(0)=\frac{-3v_1+4v_2-v_3}{2h}=0\rightarrow -3v_1+4v_2-v_3=0$$

Ejemplo

La discretización más grande que podemos tomar es 3 puntos, $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=10$

Por lo tanto h=5

Primera condición: $v_1=0$

Segunda condición: $-3v_1+4v_2-v_3=0$

Para x_2: $10000\left(\frac{v_1-2v_2+v_3}{25}\right)+100(x_2-10)=0$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 400 & -800 & 400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}$$

La solución es: $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}625 & 2{,}5 \end{pmatrix}$

Ejemplo

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La discretización siguiente es h/2=2,5 y produce 5 puntos, x=[0; 2,5;5;7,5;10]

$$\text{Primera condición}: v_1 = 0$$

$$\text{Segunda condición}: -3v_1 + 4v_2 - v_3 = 0$$

$$\text{Para } x_2: 10000\left(\frac{v_1 - 2v_2 + v_3}{25/4}\right) + 100\,(x_2 - 10) = 0$$

$$\text{Para } x_3: 10000\left(\frac{v_2 - 2v_3 + v_4}{25/4}\right) + 100\,(x_3 - 10) = 0$$

$$\text{Para } x_4: 10000\left(\frac{v_3 - 2v_4 + v_5}{25/4}\right) + 100\,(x_4 - 10) = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1600 & -3200 & 1600 & 0 & 0 \\ 0 & 1600 & -3200 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 1600 & -3200 & 1600 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 750 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix}$$

La solución es: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2344 & 0{,}9375 & 1{,}9531 & 3{,}125 \end{pmatrix}$

Ejemplo

La discretización siguiente es h/4=1,25 y produce 9 puntos, x=[0; 1,25;2,5;3,75;5;6,25;7,5;8,75;10]

Primera condición: $v_1=0$

Segunda condición: $-3v_1+4v_2-v_3=0$

Para x_i: $10000\left(\dfrac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{25/16}\right)=-100\left(x_i-10\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6400 & -12800 & 6400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6400 & -12800 & 6400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6400 & -12800 & 6400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6400 & -12800 & 6400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6400 & -12800 & 6400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6400 & -12800 & 6400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6400 & -12800 & 6400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 875 \\ 750 \\ 625 \\ 500 \\ 375 \\ 250 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$v=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}0684 & 0{,}2734 & 0{,}5957 & 1{,}0156 & 1{,}5137 & 2{,}0703 & 2{,}6666 & 3{,}2812 \end{pmatrix}$

Ejemplo

$$v_h=\begin{pmatrix}0\\0,625\\2,5\end{pmatrix}\longrightarrow v_{h/2}=\begin{pmatrix}0\\0,2344\\0,9375\\1,9531\\3,125\end{pmatrix}\longrightarrow v_{h/4}=\begin{pmatrix}0\\0,0684\\0,2734\\0,5957\\1,0156\\1,5137\\2,0703\\2,6666\\3,2812\end{pmatrix}$$

Usando Richardson se puede obtener una solución mejor para el punto medio y el extremo.

$$v(L/2)=\frac{2^2\,x\,0,9375-0,625}{2^2-1}=1,041667+O(h^4) \qquad v(L)=\frac{2^2\,x\,3,125-2,5}{2^2-1}=3,33333+O(h^4)$$

$$v(L/2)=\frac{2^2\,x\,1,0156-0,9375}{2^2-1}=1,041633+O(h^4) \qquad v(L)=\frac{2^2\,x\,3,2812-3,125}{2^2-1}=3,33327+O(h^4)$$

$$v(L/2)=\frac{2^4\,x\,1,041633-1,041667}{2^4-1}=1,041627+O(h^6) \qquad v(L)=\frac{2^4\,x\,3,33327-3,33333}{2^4-1}=3,333266+O(h^6)$$

Ejemplo

```
function [x,v]=viga_empotrada(P,EJ,L,np)
%Deflexion de una viga empotrada en su extremo izquierdo bajo la acción de
%una carga P concentrada en el extremo derecho. Solución por diferencias
%finitas de segundo orden.
%Uso: [x,v]=viga_empotrada(P,EJ,L,np)
%Entradas: P=valor de la carga, EJ=rigidez de la viga, L=Longitud,
%np=numero de puntos
%Salidas: x=posición axial de los nodos, v=deflexión vertical.
%-----------Inicializacion-----------------------------------------------
x=linspace(0,L,np); %crea vector de posiciones nodales
h=x(2)-x(1); %determina el paso
A=zeros(np,np);
b=zeros(np,1);
A(1,1)=1; %condición de extremo fijo
A(2,1:3)=[-3,4,-1]; %condición de giro de la sección nulo, derivada asimétrica adelante.
for i=3:np
    A(i,i-2:i)=[1,-2,1]; %derivada segunda centrada
    b(i,1)=-P/EJ*h^2*(x(i-1)-L); %término independiente
end
%-----------Solución-------------------------------------------------------
v=A\b;
x=x';
end
```

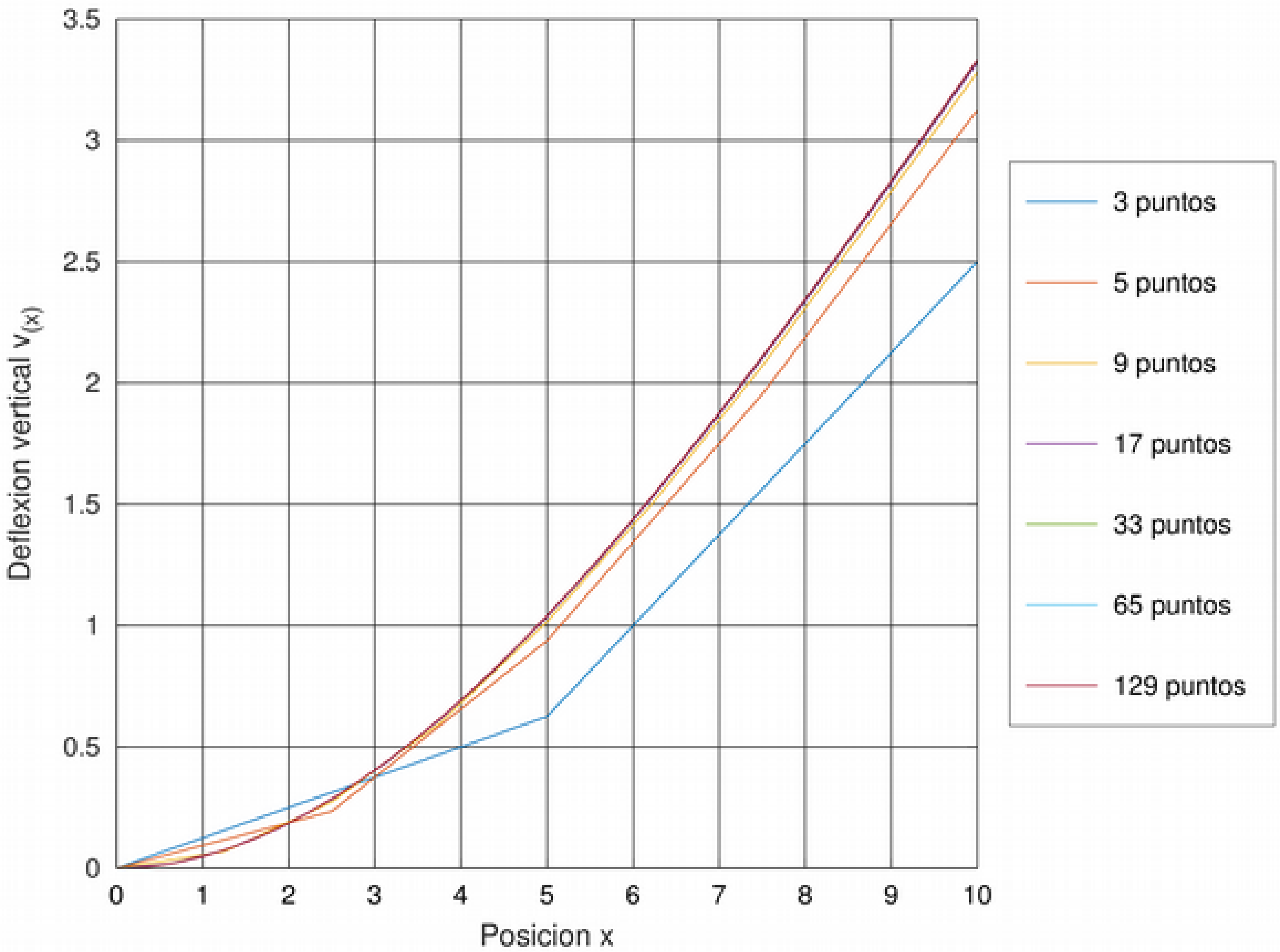
Ejemplo

puntos	Paso	v(10)	error rel
3	5	2,5	---
5	2,5	3,125	25,00 %
9	1,25	3,2812	5,00 %
17	0,625	3,3203	1,19 %
33	0,3125	3,3301	0,30 %
65	0,15625	3,3325	0,07 %
129	0,078125	3,3331	0,02 %
Richardson	2,5	3,3333	

Solución analítica:
$v(L)=PL^3/(3EJ)=3,3333$

Richard Dean Anderson
“McGyver”

Ejemplo



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Deflexion vertical $v_{(x)}$
Posicion x
3 puntos
5 puntos
9 puntos
17 puntos
33 puntos
65 puntos
129 puntos

Ejemplo de solución de EDP

Ecuación del calor en 1D

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t),\text{con } x\in[0,L]\wedge t\in[0,\infty)$$
$$T(x,0)=T^0, T(0,t)=T_0, T(L,t)=T_L$$

Para poder resolver el problema se trabaja en dos etapas, primero en el espacio y luego en el tiempo.
Primero discretizamos en el espacio, dividiendo el dominio de x en n puntos.
Luego se reemplaza la derivada espacial en la EDP. Como la función solución depende del tiempo y del espacio, usamos los subíndices para indicar el nodo del espacio y el supraíndice t para indicar el instante temporal.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i,t_l)=\frac{T_{i+1}^t-2T_i^t+T_{i-1}^t}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2) \longrightarrow \frac{dT_i^t}{dt}=\alpha\left(\frac{T_{i+1}^t-2T_i^t+T_{i-1}^t}{\Delta x^2}\right)$$

Ejemplo

Se evalúa la fórmula en los n-2 puntos (interiores).

$$\frac{dT_i^t}{dt} = \alpha\left(\frac{T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t}{\Delta x^2}\right)$$

En las ecuaciones de los extremos se reemplaza la condición Dirichlet.

$$\frac{dT_1^t}{dt} = \alpha\left(\frac{T_2^t - 2T_1^t + T_0^t}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{dT_2^t}{dt} = \alpha\left(\frac{T_3^t - 2T_2^t + T_1^t}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{dT_{n-1}^t}{dt} = \alpha\left(\frac{T_n^t - 2T_{n-1}^t + T_{n-2}^t}{\Delta x^2}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{dT_1^t}{dt} \\ \frac{dT_2^t}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dT_{n-1}^t}{dt} \end{array}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} T_1^t \\ T_2^t \\ \vdots \\ T_{n-1}^t \end{array}\right) + \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\begin{array}{c} T_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_L \end{array}\right)$$

Ejemplo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dT_1^t}{dt} \\ \dfrac{dT_2^t}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dT_{n-1}^t}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ \vdots \\ T_{n-1}^t \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} T_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_L \end{pmatrix}$$

En forma vectorial, la ecuación se puede expresar así $\dot{T}^t = A \cdot T^t + b$

Cada elemento i del vector T es la temperatura en el nodo i en el instante t.
Observemos que la expresión final se puede resolver como un sistema de EDO con los métodos de un paso vistos.

Ejemplo

Pongamos algunos números

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ con } x \in [0,1]$$

$$T(x,0) = -400x^2 + 300x + 100, \; T(0,t) = 100, \; T(1,t) = 0, t_{final} = 0.1$$

Discretizamos con 5 puntos: x=[0,0.25,0.5,0.75,1]

$$\begin{pmatrix} \frac{dT_1^t}{dt} \\ \frac{dT_2^t}{dt} \\ \frac{dT_3^t}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{(0.25^2)} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{pmatrix} + \frac{1}{(0.25^2)} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \frac{1}{(0.25^2)} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, T^t = \begin{pmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{pmatrix}, b = \frac{1}{(0.25^2)} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{t+1} = T^t + \Delta t \left(A \cdot T^t + b \right)$$

Evaluación f(0)

tiempo t \ posicion x	0	0,25	0,5	0,75	1	f=(A*T+b)		
0	100	150	150	100	0	Fila 1	Fila 2	Fila 3
0,01	100					-800,00	-800,00	-800,00
0,02	100							
0,03	100							
0,04	100							
0,05	100							
0,06	100							
0,07	100							
0,08	100							
0,09	100							
0,1	100							

Ejemplo

$$A=\frac{1}{(0.25^2)}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix},\ T^t=\begin{pmatrix}T^t_1\\ T^t_2\\ T^t_3\end{pmatrix},\ b=\frac{1}{(0.25^2)}\begin{pmatrix}100\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad T^{t+1}=T^t+\Delta t\,(A\cdot T^t+b)$$

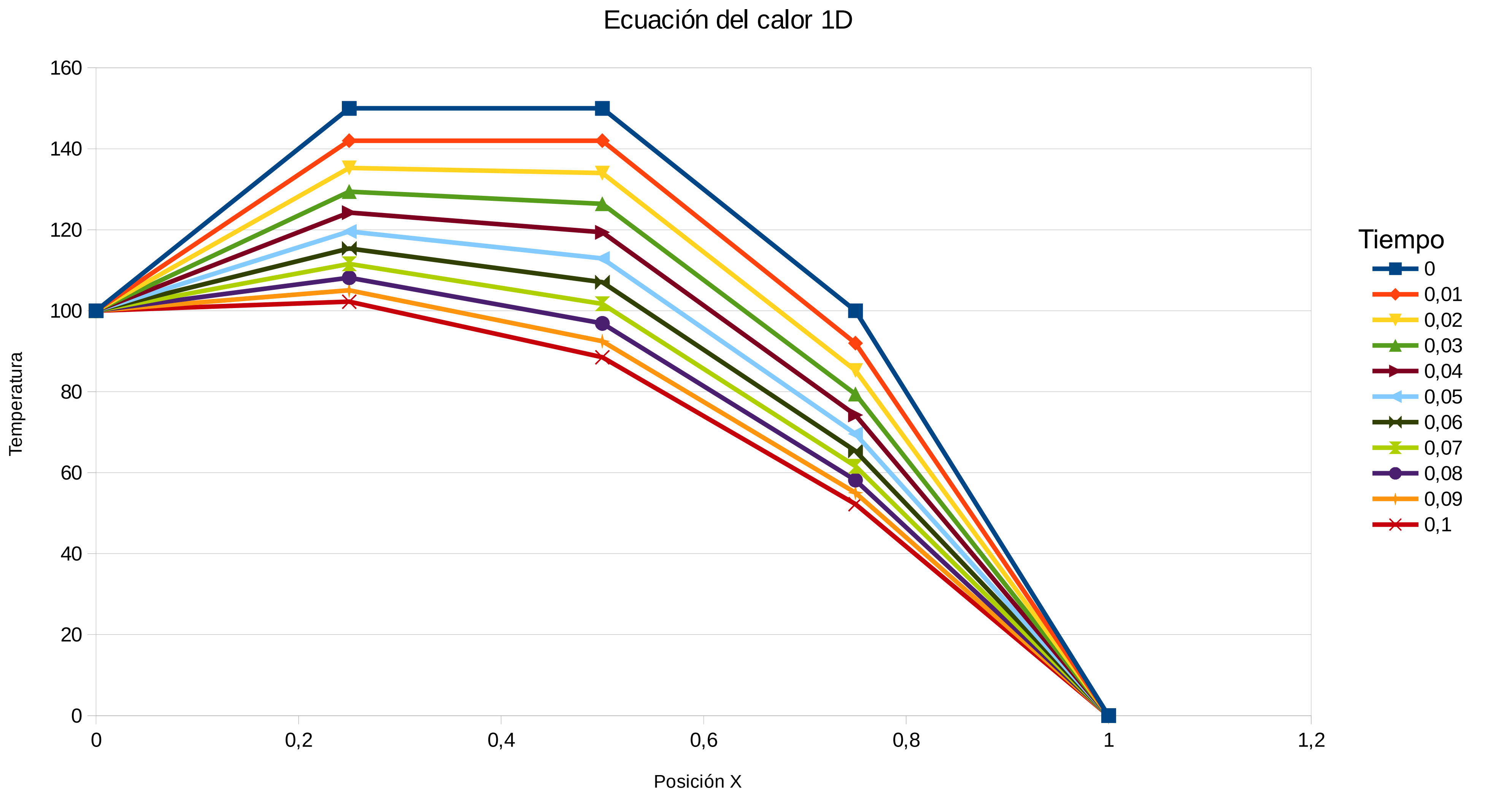
Predicción

tiempo t \ posicion x	0	0,25	0,5	0,75	1	f=(A*T+b)		
0	100	150	150	100	0	Fila 1	Fila 2	Fila 3
0,01	100	142	142	92	0	-800,00	-800,00	-800,00
0,02	100				0			
0,03	100				0			
0,04	100				0			
0,05	100				0			
0,06	100				0			
0,07	100				0			
0,08	100				0			
0,09	100				0			
0,1	100				0			

Ejemplo

tiempo t \ posicion x	0	0,25	0,5	0,75	1	f=(A*T+b)		
0	100	150	150	100	0	Fila 1	Fila 2	Fila 3
0,01	100	142,00	142,00	92,00	0	-800,00	-800,00	-800,00
0,02	100	135,28	134,00	85,28	0	-672,00	-800,00	-672,00
0,03	100	129,43	126,41	79,43	0	-584,96	-759,04	-584,96
0,04	100	124,24	119,38	74,24	0	-519,22	-703,33	-519,22
0,05	100	119,58	112,93	69,58	0	-465,60	-644,42	-465,60
0,06	100	115,39	107,06	65,39	0	-419,72	-587,20	-419,72
0,07	100	111,59	101,72	61,59	0	-379,36	-533,60	-379,36
0,08	100	108,16	96,88	58,16	0	-343,34	-484,24	-343,34
0,09	100	105,05	92,49	55,05	0	-310,95	-439,16	-310,95
0,1	100	102,23	88,51	52,23	0	-281,71	-398,13	-281,71

Ejemplo



Ecuación del calor 1D
Temperatura
Posición X
0
20
40
60
80
100
120
140
160
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
Tiempo
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
0,06
0,07
0,08
0,09
0,1