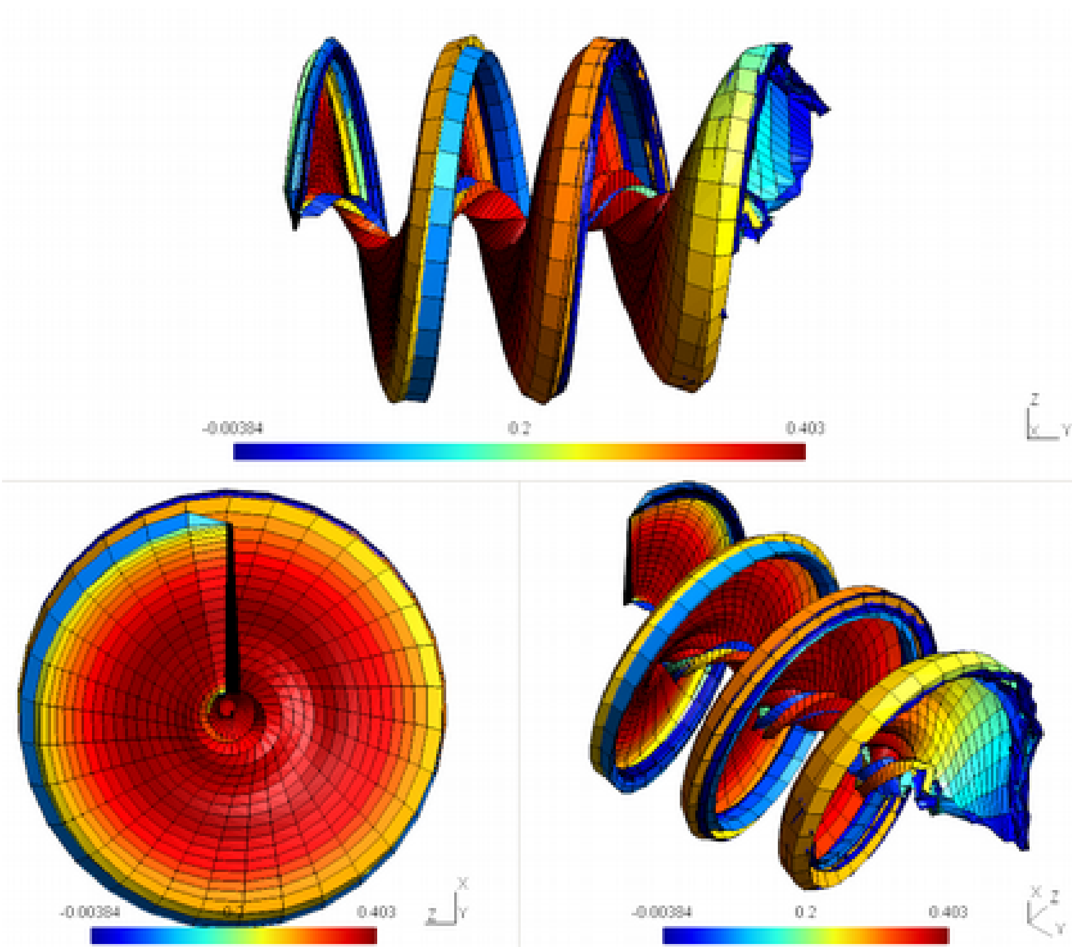
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES



Cálculo Numérico (M107)

Profesor: Nicolás G Tripp
ntripp@fcen.uncu.edu.ar

Aula Virtual
http://fcen.uncuyo.edu.ar/calculo-numerico

Unidad 8c: Ecuaciones Diferenciales con derivadas Parciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Introducción a EDP. Clasificación
- Ecuación de onda (hiperbólica)
- Soluciones numéricas: esquema explícito por diferencia central
- Ecuación del calor (parabólica)
- Soluciones numéricas: Crank-Nicholson
- Ecuación de Laplace (elíptica)
- Ejemplo

Introducción a EDP

Una EDP es una ecuación que **involucra una o más derivadas parciales** de una función desconocida que depende de dos o más variables.

El orden de la derivada más alta representa el **orden de la ecuación**.

Se denomina EDP **lineal** si los coeficientes son constantes o funciones lineales. De lo contrario se denomina EDO **nolineal**.

Se denomina EDP lineal **homogénea** si todos los términos contienen a la función desconocida o alguna de sus derivadas. De lo contrario se denomina **inhomogénea**

Ejemplos:

Ecuación de onda 1D: $$\frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2}$$ Vibración transversal o axial de cuerdas

Ecuación de convección-difusión: $$\frac{\partial \zeta_{(x,t)}}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta_{(x,t)}}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \zeta_{(x,t)}}{\partial x^2}$$ Fenómenos de Transporte

Ecuación de calor 1D: $$\frac{\partial u_{(x,t)}}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2}$$ Transferencia del calor en barras aisladas

Ecuación de Laplace 2D: $$\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} = 0$$ Problemas potenciales

Clasificación

Se denomina EDP cuasilineal a una EDP expresada de la siguiente forma

$$A\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x},\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial y}\right)$$

Siendo A,B,C constantes.

Según los valores que tomen A,B,C se clasifica las EDP cuasilineales de la siguiente forma:

Si $B^2-4AC<0 \rightarrow$ la ecuación se denomina **elíptica**

Si $B^2-4AC=0 \rightarrow$ la ecuación se denomina **parabólica**

Si $B^2-4AC>0 \rightarrow$ la ecuación se denomina **hiperbólica**

Las ecuaciones elípticas representan **problemas de equilibrio** en dominios cerrados, donde a partir de la información del contorno se encuentra la solución en todo el interior.

Las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas representan **problemas de propagación** en dominios abiertos. La solución se obtiene propagando la información inicial.

Ecuación de onda

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La ecuación de onda puede modelar distintos fenómenos físicos, como por ejemplo:

- Pequeños desplazamientos transversales de una cuerda elástica, tensada en sus extremos.
- Propagación de ondas de sonido viajando a una velocidad c en un medio uniforme
- Desplazamientos axiales de una barra elástica.

$$\frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2}$$

Es una ecuación hiperbólica de segundo orden.

c es una constante asociada a la velocidad de propagación de la onda. Para el caso de la cuerda tensada, $c^2 = T/\rho$ donde T es la tensión aplicada en los extremos y ρ es la densidad de la cuerda.

Como posee dos derivadas parciales de segundo orden, necesita **dos condiciones de borde** (posición de ambos extremos) y **dos condiciones iniciales** (posición y velocidad).

Tiene solución analítica, la más conocida es la solución de D'Alembert que vale para problemas con desplazamiento inicial en reposo.

$$u_{(x,t)} = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right], \text{siendo } f(x) \text{ la posición inicial}$$

Solución numérica de la ecuación de onda

<u>Esquema explícito</u>

Se aproximan las derivadas parciales por fórmulas centrales de orden $O(h^2)$.

$$\frac{\partial^2 u_{(xi,ti)}}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{t-1} - 2u_i^t + u_i^{t+1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t}{(\Delta x)^2}$$

$$\longrightarrow$$

$$\frac{u_i^{t-1} - 2u_i^t + u_i^{t+1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t}{(\Delta x)^2}$$

$$u_i^{t-1} - 2u_i^t + u_i^{t+1} = \left(c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right) \left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t \right)$$

$$u_i^{t+1} = r^2 \left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t \right) + 2u_i^t - u_i^{t-1}$$

$$\boxed{u_i^{t+1} = r^2 u_{i-1}^t + 2(1 - r^2) u_i^t + r^2 u_{i+1}^t - u_i^{t-1}}$$

Solución numérica de la ecuación de onda

Esquema explícito

Se plantea la ecuación discreta en cada punto interior del espacio y se resuelve la ecuación.

$$\begin{pmatrix} u_2^{t+1} \\ u_3^{t+1} \\ u_4^{t+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-r^2) & r^2 & 0 & \dots & 0 \\ r^2 & 2(1-r^2) & r^2 & \dots & 0 \\ 0 & r^2 & 2(1-r^2) & r^2 & \dots \\ . & . & \vdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & 2(1-r^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2^{t} \\ u_3^{t} \\ u_4^{t} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2^{t-1} \\ u_3^{t-1} \\ u_4^{t-1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t-1} \end{pmatrix} + r^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$U^{t+1} = A \cdot U^{t} - U^{t-1} + r^2 b$$

Solución numérica de la ecuación de onda

Inicio del método

Por lo general se cuenta con la posición inicial f(x) y la velocidad inicial g(x). Realizando una expansión en serie de Taylor se pueden determinar los valores previos al inicio.

$$u(x_{i,1}) = u(x_{i,0}) + \frac{\partial u_{(x_{i,0})}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 u_{(x_{i,0})}}{\partial t^2}\frac{(\Delta t)^2}{2} + O(\Delta t^3)$$

$$u(x_{i,1}) = f(x_i) + g(x_i)\Delta t + c^2\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u_{(x_{i,0})}}{\partial x^2} + O(\Delta t^3)$$

$$u(x_{i,1}) = f(x_i) + g(x_i)\Delta t + \frac{r^2}{2}(u_{(xi-1,0)} - 2u_{(xi,0)} + u_{(xi+1,0)}) + O(\Delta t^3)$$

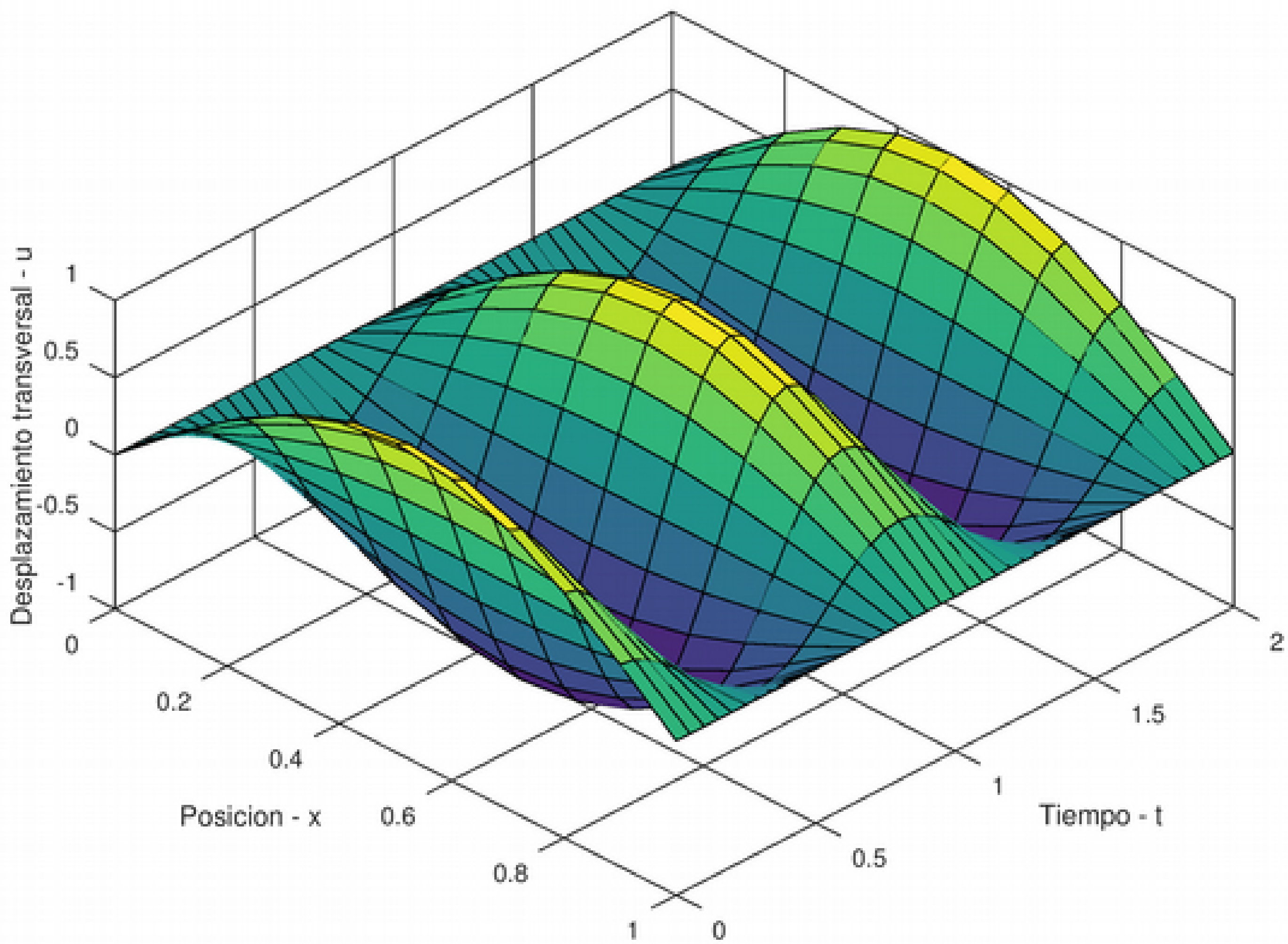
$$u(x_{i,1}) = (1-r^2)f(x_i) + g(x_i)\Delta t + \frac{r^2}{2}(u_{(xi-1,0)} + u_{(xi+1,0)}) + O(\Delta t^3)$$

Ejemplo: Ecuación de onda

```
function [u]=onda1D(n,tfinal)
  c=2;  %constante onda
  dx=1/(n-1) %paso espacial
  r=1
  dt=dx/c %paso temporal
  nt=tfinal/dt; %numero de pasos
  u=zeros(n,nt);
  x=[0:dx:1]'; %discretizacion espacial
  #condiciones iniciales
  f=sin(pi*x)+sin(2*pi*x); %posiciones iniciales
  g=0*x; %velocidades iniciales
  u(:,1)=f;
  u(2:n-1,2)=(1-r^2)*f(2:n-1,1)+dt*g(2:n-1,1)+0.5*r^2*(f(1:n-2,1)+f(3:n,1));
  #condiciones de borde
  u1=0;
  un=0;
  [A,b]=matinit(n,r,u1,un); #Inicializo matriz de coeficientes
  for i=2:nt
    u(2:end-1,i+1)=A*u(2:end-1,i)-u(2:end-1,i-1)+b;
  endfor
 endfunction
```

```
function [A,b]=matinit(n,r,u1,un)
  A=zeros(n-2);
  A(1,1:2)=[2*(1-r^2),r^2];
  A(end,end-1:end)=[r^2,2*(1-r^2)];
  for fila=2:n-3
    A(fila,fila-1:fila+1)=[r^2,2*(1-r^2),r^2];
  endfor
  b=zeros(n-2,1);
  b(1,1)=u1;
  b(end,1)=un;
  b=r^2*b;
  endfunction
```

Ejemplo: Ecuación de onda



Ecuación del calor

La ecuación del calor modela un proceso de difusión. Algunos ejemplos que se pueden modelar con esta ecuación son:

- Distribución de temperaturas en un alambre aislado con distintas temperaturas en sus extremos.
- Distribución radial de temperaturas en un caño cuyas paredes se encuentran a distintas temperaturas.
- Distribución de velocidad dentro de una capa límite.

$$\frac{\partial u_{(x,t)}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2}$$

Es una ecuación parabólica de segundo orden.

α es una constante asociada a la conductividad térmica o la viscosidad de un fluido.

Como posee una derivada parciales de segundo orden y otra pero de primer orden, necesita **dos condiciones de borde** (posición de ambos extremos) y **una condición inicial** (posición).

Esta ecuación tiene solución analítica mediante series de Fourier.

Solución numérica de la ecuación del calor

El esquema explícito de orden $O(Dt^2)$ es incondicionalmente inestable (falla siempre)

Se utiliza otro método denominado **Crank-Nicholson** que es **incondicionalmente estable** (funciona siempre)

Se aproximan la derivada parciales en el espacio por la fórmula central y la temporal por la fórmula hacia adelante.

$$\frac{\partial u_{(xi,ti)}}{\partial t} \approx \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{(\Delta t)}, \quad \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t}{(\Delta x)^2}$$

Al reemplazarlas en la ecuación del calor, la derivada espacial se reemplaza por la suma de dos derivadas, evaluadas en distintos tiempos.

$$\frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{(\Delta t)} = \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^{t+1} - 2u_i^{t+1} + u_{i+1}^{t+1}\right) + \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t\right)$$

$$2\left(u_i^{t+1} - u_i^t\right) - \alpha\frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^{t+1} - 2u_i^{t+1} + u_{i+1}^{t+1}\right) = \alpha\frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t\right)$$

$$\boxed{2(1+r)u_i^{t+1} - r\,u_{i-1}^{t+1} - r\,u_{i+1}^{t+1} = 2(1-r)u_i^t + r\,u_{i-1}^t + r\,u_{i+1}^t}$$

Solución numérica de la ecuación del calor

Se plantea la ecuación discreta en cada punto interior del espacio y se forma un SEL.

$$\begin{bmatrix} 2(1+r) & -r & 0 & \dots & 0 \\ -r & 2(1+r) & -r & \dots & 0 \\ 0 & -r & 2(1+r) & -r & \dots \\ . & . & \vdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -r & 2(1+r) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2^{t+1} \\ u_3^{t+1} \\ u_4^{t+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t+1} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} u_3^t + u_1 \\ u_4^t + u_2^t \\ u_5^t + u_3^t \\ \vdots \\ u_{n-1}^t + u_n \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot U^{t+1} = r\, U^t + r\, b$$

En este caso se debe resolver un SEL para avanzar en el tiempo.

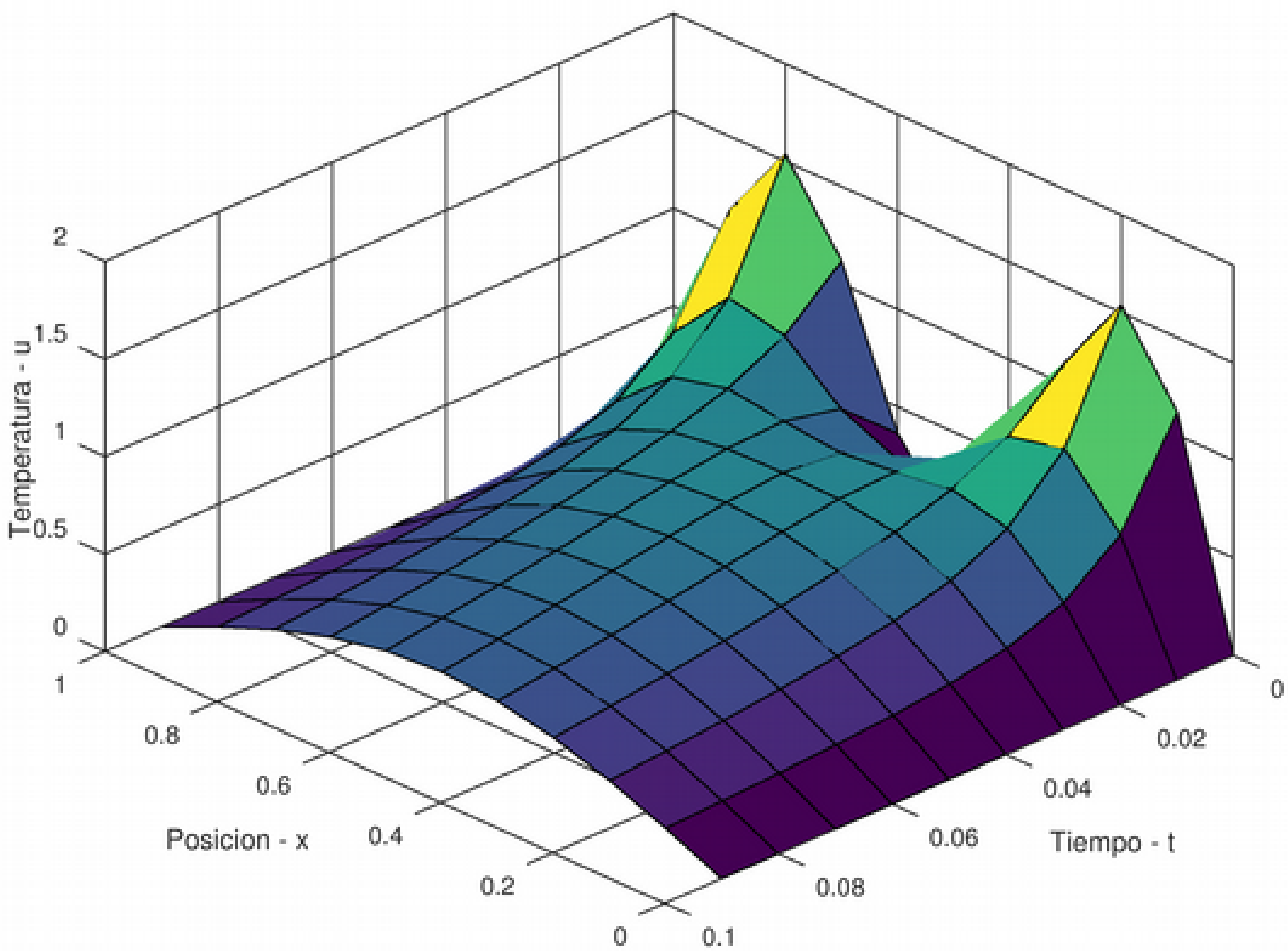
Requiere más esfuerzo de cómputo que un método explícito pero tiene la estabilidad garantizada. Esta es una propiedad de los métodos implícitos.

Ejemplo: Ecuación del calor

```
function [u]=onda1D(n,tfinal)
  alfa=1;  %constante onda
  dx=1/(n-1) %paso espacial
  r=1
  dt=r*dx^2/alfa %paso temporal
  nt=ceil(tfinal/dt) %numero de pasos
  u=zeros(n,nt);
  x=[0:dx:1]'; %discretizacion espacial
   #condiciones iniciales
  f=sin(pi*x)+sin(3*pi*x); %posiciones iniciales
  u(:,1)=f;
   #condiciones de borde
  u1=0;
  un=0;
  [A,b]=matinit(n,r,u1,un); #Inicializo matriz de coeficientes
  t(1)=0;
  for i=1:nt-1
    u(2:end-1,i+1)=A\(r*(u(3:end,i)+u(1:end-2,i))+b);
    t(i+1)=i*dt;
  endfor
 endfunction
```

```
function [A,b]=matinit(n,r,u1,un)
  A=zeros(n-2);
  A(1,1:2)=[2*(1+r),-r];
  A(end,end-1:end)=[-r,2*(1+r)];
  for fila=2:n-3
    A(fila,fila-1:fila+1)=[-r,2*(1+r),-r];
  endfor
  b=zeros(n-2,1);
  b(1,1)=u1;
  b(end,1)=un;
  b=r*b;
  endfunction
```

Ejemplo: Ecuación del calor



Ecuación de laplace

La ecuación de laplace representa problemas potenciales. Algunos ejemplos que se pueden modelar con esta ecuación son:

- Campo electrostático
- Campo de velocidades para fluido ideal (sin efectos viscosos)
- Campo gravitacional
- Conducción estacionaria del calor

$$\nabla^2 u_{(x,y)} = \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} = 0$$

Es una ecuación elíptica de segundo orden.

Como posee dos derivada parciales de segundo orden, necesita **cuatro condiciones de borde** (potencial en todo el contorno).

Esta ecuación tiene solución analítica mediante funciones de Green.

Solución numérica de la ecuación de laplace

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Al ser una ecuación elíptica, representa un problema de equilibrio y no posee problemas de estabilidad.

Se aproximan la derivada parciales en el espacio por la fórmula central en ambas direcciones.

$$\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}, \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

Se reemplazan las aproximaciones en la ecuación de laplace y se obtiene la "roseta" o "molécula" de cálculo.

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Se acostumbra considerar que Δx y Δy son iguales.

$$\boxed{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0}$$

Solución numérica de la ecuación de laplace

Se plantea la ecuación discreta en cada punto interior del espacio y se forma un SEL. $A \cdot U = b$

En este caso se debe resolver un SEL un única vez.

Ver código en libro de Mathews-Fink