**Unidad 1: Vectores geométricos en IR2 y en IR3**

**Vectores geométricos del plano y del espacio**

* **Cuplas puntuales**

Consideramos P al conjunto de puntos del plano. Una cupla puntual (a,b) es un par ordenado de puntos del plano P, es decir: (a,b) ϵ PXP

 a es el *origen* de la cupla

 b es el *extremo* de la cupla

 b

 a

Toda cupla puntual determina una recta del plano denominada *recta sostén*.

 D

 b

a

Cupla nula

Es la cupla que posee su origen y extremo en el mismo punto, es decir: (a, a)

 a

Cuplas alineadas

Se refiere a cuplas que poseen la misma recta sostén.

 a b c d

Cuplas consecutivas

Se refiere a cuplas en las cuales el extremo de una coincide con el origen de la otra.

 a b = c d

 b

 a d

Cuplas iguales

Dos cuplas puntuales son iguales cuando sus respectivos orígenes son iguales y sus extremos también.

 (a, b) = (c, d) ⇔ (a = c ∧ b = d)

 a = c b = d

* **Vectores fijos del plano**

En el plano P se fija un punto o, y se consideran todas las cuplas con origen en ese punto.

 O• a

 c

 b

 (o, a) =  (o,b) =  (o, c) = 

Cada cupla puntual (o, a) =  es un vector FIJO, y al conjunto de todos los vectores fijos del plano de origen en el punto o, se lo denomina Vo,2.

Adición en Vo,2

En Vo,2 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,2 X Vo,2 → Vo,2

 (,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+

1º caso: Cuplas puntuales no alineadas y no nulas.

o a

 b c += 

2º caso: Cuplas puntuales alineadas de igual sentido.

 o a b c

 += 

3º caso: Cuplas puntuales alineadas y de distinto sentido.

 += 

 a c o b

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,2

La multiplicación externa en Vo,2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,2 → Vo,2

 (k, ) →k • =

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k• 

Si k = 1, entonces k •= 1. = 

Si k = -1, entonces k• = (-1). = - , denominado vector opuesto de .

- 

 b o a

Si k = 2, entonces k •= 2. 

2. 

 o a b

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 1 y 2*
* **Vectores fijos del espacio tridimensional**

Se considera al conjunto Vo,3, que es el conjunto de todas las cuplas puntuales del espacio tridimensional con origen en o.

Adición en Vo,3

En Vo,3 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,3 X Vo,3 → Vo,3

 (,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,3

La multiplicación externa en Vo,3 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,3 → Vo,3

 (k, ) →k • = 

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k•

De similar forma se puede extender a Vo,n, que es el conjunto de todos los vectores fijos del espacio n-dimensional.

Adición en Vo,n

En Vo,n , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,n X Vo,n → Vo,n

 (,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+.

Propiedades de la suma en Vo,n

* Asociativa

(+) += +(+ ), siendo , y  vectores de Vo,n

* Conmutativa

+= +, siendo  y  vectores de Vo,n

* Elemento neutro

Existe el vector nulo de Vo,n, tal que para todo vector de Vo,n, se verifica que:

+= += 

* Elemento opuesto

Para todo vector de Vo,n, existe su vector opuesto -  de Vo,n, tal que:

 + (-)= (-)+= 

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n

La multiplicación externa en Vo,n es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,n → Vo,n

 (k, ) →k • =

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k• 

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n

|  |
| --- |
| Siendo  y  vectores de Vo,n, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:* t.( +)= t.  + t.
* ( t+k) . = t. + k.
* (t.k).  = t.(k. )
* 1. =

  |
| Nota: el producto de un número real t por un vector v es un nuevo vector t.v, que tiene la misma dirección que v, el mismo sentido que v si t > 0, o sentido opuesto si t < 0.  |

* **Componentes y coordenadas de un vector de IR2 y IR3**

En el plano IR x IR = IR2 es posible identificar a cada punto con un par de números reales que son sus coordenadas, por ejemplo considere el punto a = (xa , ya ) . Estascoordenadas permiten representar ese punto en el plano IR2.

 IR

 ya a

 xa IR

Si además del punto a = (xa , ya ) se considera el punto o = ( xo , yo ), las componentes de un vector u = , en el plano IR2 , se determinan como :

 u =  = (xa -xo , ya - yo)

De este modo, los vectores del plano quedan asociados de manera única con un par de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y) de IR2.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 3*

En el espacio IR x IR x IR = IR3 es posible identificar a cada punto con una terna ordenada de números reales, que son sus coordenadas, por ejemplo considere al punto a = (xa , ya , za).

 za

 a

 ya

 xa

Si además del punto a = (xa , ya, za ) se considera el punto o = ( xo , yo , zo ), las componentes de un vector u = , en el espacio IR3 , se determinan como :

 u =  = (xa -xo , ya - yo,za -zo )

Los vectores del espacio tridimensional quedan asociados de manera única con una terna de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y, z) de IR3.

Si las coordenadas del punto o fueran: o = (0, 0) en el plano IR2, o bien o = (0, 0, 0) en el espacio IR3, las componentes del vector u coincidirían con las coordenadas del punto a, sólo en ese caso.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 5, 6, 7, 8, 9 y 10*

En el espacio IR x … x IR = IRn es posible identificar a cada punto con una n-upla ordenada de números reales, que son sus coordenadas, por ejemplo el punto a = (x1 ,x2, … , xn).

Si además del punto “a” se considera el punto o = ( y1 , y2 ,…, yn ), las componentes de un vector u = , en el espacio IRn , se determinan como :

 u =  = (x1 –y1 , x2 – y2,…,xn –yn )

Los vectores del espacio n-dimensional quedan asociados de manera única con una n-upla de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x1, x2 ,…, xn) de IRn.

* **Adición o suma en IR2**

En IR2, la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: IR2 x IR2 → IR2

 (u, v) →u+v = w

Se denomina vector suma al vector resultante: w = u+v.

Es decir, si u = (x, y) de IR2 , y v = (x0 ,y0 ) de IR2 , la suma u+v es el vector w de componentes:

 w = u+v = (x+x0 ,y+y0 ) (simplemente se suma componente a componente).

Propiedades de la suma en IR2

* Asociativa

(u+v) + w = u + (v+w), siendo u, v y w vectores de IR2

* Conmutativa

u+ v= v + u, siendo u y v vectores de IR2

* Elemento neutro

Existe el vector nulo o = ( 0, 0 ) de IR2, tal que para todo vector u de IR2, se verifica que:

o + u = u + o = u

* Elemento opuesto

Para todo vector u de IR2, existe su vector opuesto – u de IR2, tal que:

 u + (- u ) = ( -u ) + u = o

* **Multiplicación de un escalar por un vector de IR2**

La multiplicación externa en IR2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X IR2 → IR2

 (k, u) → k • u =w

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: w= k • u

Dados u = (x, y) de IR2 y λ de IR, el producto λ•u es el vector w de componentes:

 w = λ•u = (λx,λy) (se multiplica el número por cada una de las componentes del vector original).

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IR2

|  |
| --- |
| Siendo u y v vectores de IR2, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:* t• ( u + v)= t • u + t • v
* ( t+k) • u= t • u+ k • u
* (t.k) • u= t.(k • u)
* 1 • u= u

  |

Estando definidas la suma en IR2 y la multiplicación de un real por un elemento de IR2, y verificando estas ocho propiedades, se dice que **IR2 es un** **Espacio vectorial** sobre IR, o es un IR- espacio vectorial.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 4*
* **Adición o suma en IR3**

En IR2, la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: IR3 x IR3 → IR3

 (u, v) →u+v = w

Se denomina vector suma al vector resultante: w = u+v.

Es decir, si u = (x, y, z) de IR3 , y v = (x0 ,y0 , z0) de IR3 , la suma u+v es el vector w de componentes:

 w = u+v = (x+x0 ,y+y0 , z+z0) (simplemente se suma componente a componente).

Propiedades de la suma en IR3

* Asociativa

(u+v) + w = u + (v+w), siendo u, v y w vectores de IR3

* Conmutativa

u+ v= v + u, siendo u y v vectores de IR3

* Elemento neutro

Existe el vector nulo o = ( 0, 0, 0 ) de IR3, tal que para todo vector u de IR3, se verifica que:

o + u = u + o = u

* Elemento opuesto

Para todo vector u de IR3, existe su vector opuesto – u de IR3, tal que:

 u + (- u ) = ( -u ) + u = o

* **Multiplicación de un escalar por un vector de IR3**

La multiplicación externa en IR3 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X IR3 → IR3

 (k, u) → k • u =w

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: w= k • u

Dados u = (x, y, z) de IR3 y λ de IR, el producto λ•u es el vector w de componentes:

 w = λ•u = (λx, λy, λz) (se multiplica el número real por cada una de las componentes del vector original).

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IR3

|  |
| --- |
| Siendo u y v vectores de IR3, y t y k escalares reales cualesquiera, se verifica que:* t• ( u + v)= t • u + t • v
* ( t+k) • u= t • u+ k • u
* (t.k) • u= t.(k • u)
* 1 • u= u

  |

Estando definidas la suma en IR3 y la multiplicación de un real por un elemento de IR3, y verificando estas ocho propiedades, se dice que **IR3 es un** **Espacio vectorial** sobre IR, o es un IR- espacio vectorial.

En general, se pueden definir la suma y el producto por un escalar real en el espacio IRn.

Dados u = (x1,..,xn) de IRn y v = (y1,..,yn) de IRn , la suma u+v es el vector de w componentes:

 w = u + v = (x1,...,xn) + (y1,...,yn) (x1 +y1,...,xn +yn)

Dados v = (x1,...,xn) de IRn y λ de IR, el producto λ.v es el vector w de componentes:

 w = λ.v = λ.(x1,...,xn) = (λx1,...,λxn)

Propiedades de la suma en IRn

* Asociativa

(u+v) + w= u+(v+w), siendo u,v y w vectores de IRn

* Conmutativa

 u+v= v+u, siendo u y v vectores de IRn

* Elemento neutro

Existe el vector nulo o = (0, 0, …, 0) de IRn, tal que para todo vector u de IRn, se verifica que:

 u + o = o + u = u

* Elemento opuesto

Para todo vector u de IRn, existe su vector opuesto – u de IRn, tal que:

 u + ( - u) = ( - u ) + u = o

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IRn

|  |
| --- |
| Siendo u y v vectores de IRn, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:* t• ( u + v)= t • u + t • v
* ( t+k) • u= t • u+ k • u
* (t.k) • u= t.(k • u)
* 1 • u= u
 |

## El conjunto IRn con las operaciones de suma y con la multiplicación por un escalar real, verificando todas las propiedades enunciadas, definen el Espacio vectorial IRn (IR).

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 5, 6, 7, 8, 9 y 10*
* **Dependencia e independencia lineal**

Familia de vectores

Un conjunto ordenado de vectores: F = { u1, u2,, ... , um } del espacio vectorial IRn (IR ) se denomina **familia**de vectores.

Combinaciones lineales

Sea el espacio vectorial IRn (IR) y una familia de vectores F = { u1, u2,, ... , um }, se dice que un vector w de IRn es una combinación lineal de los vectores de F, si existen los escalares k1, k2,…., km , tal quew se puede expresar en la forma:

 w = k1.u1 + k2.u2 +….+ km.um , en donde k1, k2,…., km son elementos de IR

Si el vector w de V es el vector nulo, entonces la combinación lineal es:

  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um , denominada combinación trivial.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 11*

Familia libre y familia ligada

Si en la combinación trivial  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um , resulta que todos los escalares son nulos, es decir: k1 = 0 = ... = km = 0 entonces la familia de vectores F = {u1, u2,, ... , um } recibe el nombre de **familia libre.**

En el caso contrario, si al menos uno de los escalares es no nulo, la familia F se denomina **ligada**.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 12, 13*

Vectores linealmente dependientes e independientes

Un conjunto de vectores {v1,...,vn} se dice que es **linealmente independiente** si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial, es decir, si siempre que se tenga:  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um, entonces ki = 0 para cada i. En caso contrario, se dice que son **linealmente dependientes**.

Los vectores de una familia libre son linealmente independientes, esto significa que ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia. Los vectores de una familia ligada son linealmente dependientes.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 14*
* **Norma o módulo de un vector y sus propiedades**

Existe una función que asigna a cada vector u de IRn , un número real, verificando ciertas condiciones. Esa función recibe el nombre de norma o módulo del vector:

|| || : IRn → IR

 u → || u ||

Condiciones:

Siendo u y v vectores de IRn y t un escalar real:

* || u || ≥ 0 ∧ ( || u || = 0 ⇔ u = 0 )
* || t. u || = | t | . || u ||
* || u + v || ≤ || u || + || v || ( Desigualdad triangular)

Norma usual

Considerando IR2 y IR3 , que serán los espacios vectoriales que se abordarán durante este curso, se define la norma o módulo usual de la siguiente manera:

Si u = ( x, y ) de IR2 , || u ||= + 

Si u = ( x, y, z ) de IR3 , || u ||= + 

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 15, 16 y 17*

Vectores normados:

Se denominan vectores normados o unitarios, a aquellos cuya norma o módulo es igual a uno, es decir u es un vector normado si || u || = 1.

Si un vector v no nulo, tiene norma distinta de uno, es posible encontrar a partir de v un vector normado. Para ello es suficiente con multiplicar al vector v por el número real inverso de su norma o módulo, es decir:

v ≠ 0 y || v || ≠ 1, el vector w = es normado

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 18, 19 y 20*
* **Producto interior o escalar y sus propiedades**

Existe una función tal que a cada par de vectores de IRn, le asigna un número real, cumpliendo ciertos requisitos, esta función recibe el nombre de producto escalar o producto punto.

• : IRn x IRn → IR

(u, v) → u • v

Condiciones:

Para todo u, para todo v y para todo w del espacio IRn , y para cualquier t de IR:

u • u ≥ 0 ∧ (u • u = 0 ⇔ u = 0 )

u • v = v • u

 u • (v + w ) = u • v + u • w

t. (u • v) = u • (t . v)

Producto escalar usual o euclideo

Considerando IR2 y IR3 ,el producto escalar usual se determina de la siguiente manera:

Si u = (x1, y1) de IR2  y v = (x2, y2) de IR2 u • v = x1.x2 + y1.y2

Si u = (x1, y1, z1) de IR3  y v = (x2, y2,z2) de IR3 u • v = x1.x2 + y1.y2 + z1.z2

Sea u de IRn, se verifica que: || u || 2 = u • u , es decir || u || = +

Si u = ( x, y ) de IR2 , || u || = += + 

Si u = ( x, y, z ) de IR3 , || u ||= += + 

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 21*

Vectores ortogonales

Si el producto escalar entre dos vectores es cero, se dice que esos vectores son ortogonales:

 **u • v = 0 ⇔ u ⊥ v**

Si alguno de ellos fuera el vector nulo, el producto escalar indefectiblemente es cero, lo que indica que el vector nulo es ortogonal a cualquier otro vector.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 22, 23 y 24*
* **Ángulo entre vectores**

Dados dos vectores u y v de IRn , distintos del vector nulo, definimos el ángulo determinado por u y v, como el único ángulo ϕ obtenido: ϕ = arccos ( )

Es decir: **u • v = || u || . || v || . cos ϕ**

 *u*

 ϕ

 v

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 25 y 26*
* **Distancia entre vectores en función de la norma**

Sean dos vectores u y v de IRn , se define la distancia entre u y v, y se anota d(u, v):

 **d(u, v) = II u-v II = II v-u II**

Si u = (x1, y1) de IR2  y v = (x2, y2) de IR2

 d(u, v) = += +

Si u = (x1, y1, z1) de IR3  y v = (x2, y2,z2) de IR3

d( u, v ) = += +

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 27, 28, 29 y 30*
* **Producto cruz o vectorial de vectores del espacio tridimensional y sus propiedades**

Entre los vectores del espacio real IR3 ,existe una función denominada producto vectorial, que asigna a cada par de vectores un único vector que es ortogonal a ambos.

x : IR3 x IR3 → IR3

 (u, v) → u x v

Determinación de las componentes del vector u x v:

Si u = (u1, u2, u3) de IR3  y v = (v1, v2,v3) de IR3

**w = uxv = ( u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2-u2v1 )**

o con la notación de determinantes:

w = uxv= ()

La recta sostén del vector u x v es perpendicular al plano que determinan u y v.

El sentido del vector u x v se determina a partir de la regla de la mano derecha, una representación gráfica de la situación es la siguiente:

 v

u x v

 v



 u u

 v x u

Propiedades del producto vectorial:

* u x v = - ( v x u)
* u x(v+w)= ( u x v)+(u x w)
* (u+v) x w=(u x w)+(v x w)
* K(u x v)=(ku) x v=u x (kv)
* u x O=O x u=O
* u x u=O
* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 31, 32, 33 y 34*
* **Producto mixto**

El producto mixto entre vectores de IR3 es el número real que se obtiene a través de la siguiente expresión:  **u • ( v x w ) = ( u x v ) • w**



 w

 v u

Si u = (u1, u2, u3) de IR3  , v = (v1, v2,v3) de IR3 y w = (w1, w2, w3) de IR3

##

## u • ( v x w ) = u1.(v2.w3 – w2.v3) + u2.( v3.w1 – w3.v1) + u3. (v1.w2 – w1.v2)

Este número real obtenido, representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores u, v y w.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 35*

Teorema

***Si u y v son vectores de IR3, entonces:***

1. ***u• (u x v) = 0 ( u x v es ortogonal a u)***
2. ***v• (u x v) = 0 ( uxv es ortogonal a v)***
3. ***II u x v II 2 = II u II2 II v II2 – ( u • v)2 ( Identidad de Lagrange)***

Demostración

Sean u = (u1, u2, u3) de IR3  y v = (v1, v2,v3) de IR3

u x v = (u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2- u2v1)

Por a)

u•(u x v)= (u1, u2, u3)• (u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2- u2v1) = u1(u2v3-u3v2) + u2 (u3v1-u1v3) + u3 ( u1v2- u2v1) = 0

Recordando que || u || 2 = u • u

II u x v II 2 = (u x v) • (u x v) = (u2v3-u3v2)2 + ( u3v1-u1v3)2 + ( u1v2- u2v1)2

Además

II u II2 . II v II2 – ( u • v)2 = ( u12+ u22+ u32) ( v12+ v22 + v32) – ( u1v1 +u2v2 + u3 v3)2

Al efectuar los productos y por propiedad distributiva, se puede llegar a la identidad de Lagrange

**II uxv II 2 = II u II2 II v II2 – (u • v)2**

La identidad de Lagrange, tiene una aplicación geométrica muy útil, ya que se puede demostrar que la norma o modulo del vector uXv coincide con el área del paralelogramo que determinan los vectores u y v.

 v



 u

Si ϕ denota el ángulo entre los vectores u y v, entonces u • v = || u || . || v || . cos ϕ , de modo que reemplazando en la identidad de Lagrange:

 II uxv II 2 = II u II2 II v II2 – (u • v)2

 II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 – ( || u || . || v || . cos ϕ )2

 II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 – || u ||2 . || v ||2 . cos2 ϕ

 II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 ( 1 - cos2 ϕ)

 II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 sen2 ϕ

Por lo tanto:

 **II uxv II = II u II .II v II sen ϕ**

En la figura anterior la medida de la altura del paralelogramo determinado por u y v, está dada por: **II v II senϕ,**  por consiguiente el área de dicha figura es:

**Area = II u II .II v II .sen ϕ = II uxv II**

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 36 y 37*