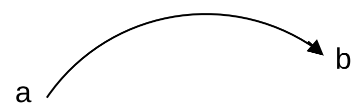
Unidad 1: VECTORES GEOMÉTRICOS EN IR^2 Y EN IR^3

Vectores geométricos del plano y del espacio

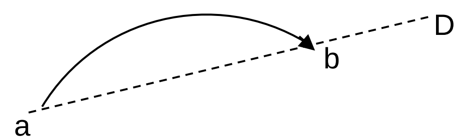
- **Cuplas puntuales**

Consideramos P al conjunto de puntos del plano. Una cupla puntual (a,b) es un par ordenado de puntos del plano P, es decir: (a,b) ϵ PXP

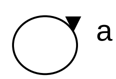
a es el *origen* de la cupla
b es el *extremo* de la cupla



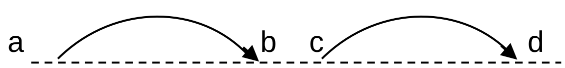
Toda cupla puntual determina una recta del plano denominada *recta sostén*.



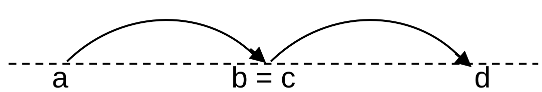
<u>Cupla nula</u>
Es la cupla que posee su origen y extremo en el mismo punto, es decir: (a, a)

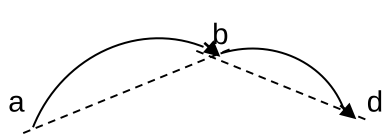


<u>Cuplas alineadas</u>
Se refiere a cuplas que poseen la misma recta sostén.



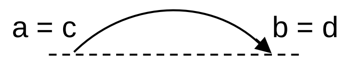
<u>Cuplas consecutivas</u>
Se refiere a cuplas en las cuales el extremo de una coincide con el origen de la otra.





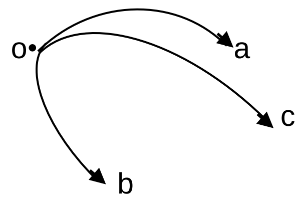
<u>Cuplas iguales</u>
Dos cuplas puntuales son iguales cuando sus respectivos orígenes son iguales y sus extremos también.

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$



- **Vectores fijos del plano**

En el plano P se fija un punto o, y se consideran todas las cuplas con origen en ese punto.



$(o, a) = \vec{oa}$ $(o,b) = \vec{ob}$ $(o, c) = \vec{oc}$

Cada cupla puntual $(o, a) = \vec{oa}$ es un vector FIJO, y al conjunto de todos los vectores fijos del plano de origen en el punto o, se lo denomina Vo,2.

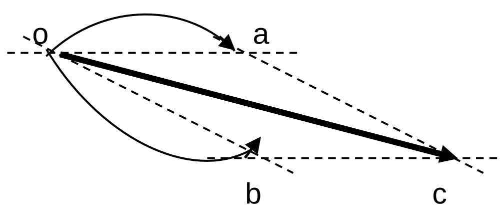
<u>Adición en Vo,2</u>

En Vo,2 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

$$+: V_{o,2} \times V_{o,2} \rightarrow V_{o,2}$$
$$(\vec{oa}, \vec{ob}) \rightarrow \vec{oa} + \vec{ob} = \vec{oc}$$

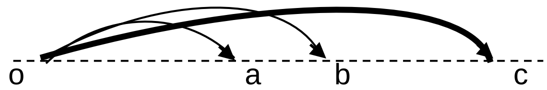
Se denomina vector suma al vector resultante: $\vec{oc} = \vec{oa} + \vec{ob}$

<u>1º caso</u>: Cuplas puntuales no alineadas y no nulas.



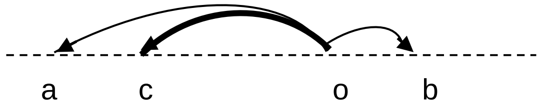
$\vec{oa} + \vec{ob} = \vec{oc}$

<u>2º caso</u>: Cuplas puntuales alineadas de igual sentido.



$$\vec{oa} + \vec{ob} = \vec{oc}$$

<u>3º caso</u>: Cuplas puntuales alineadas y de distinto sentido.



$$\vec{oa} + \vec{ob} = \vec{oc}$$

<u>Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,2</u>

La multiplicación externa en Vo,2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

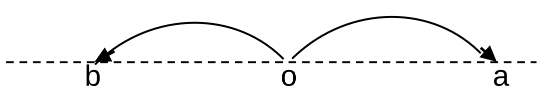
$$\bullet : \text{IR X Vo,2} \rightarrow \text{Vo,2}$$
$$(k, \vec{oa}) \rightarrow k \bullet \vec{oa} = \vec{ob}$$

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: $\vec{ob} = k \bullet \vec{oa}$

Si k = 1, entonces $k \bullet \vec{oa} = 1.\ \vec{oa} = \vec{oa}$

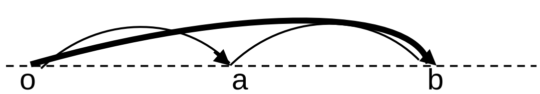
Si k = -1, entonces $k \bullet \vec{oa} = (-1).\ \vec{oa} = -\vec{oa}$, denominado vector opuesto de $\vec{oa}$.

$\vec{ob} = -\vec{oa}$



Si k = 2, entonces $k \bullet \vec{oa} = 2.\ \vec{oa}$

$\vec{ob} = 2.\ \vec{oa}$



- **Vectores fijos del espacio tridimensional**

Se considera al conjunto Vo,3, que es el conjunto de todas las cuplas puntuales del espacio tridimensional con origen en o.

Adición en Vo,3

En Vo,3 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

$$+: Vo,3 \times Vo,3 \rightarrow Vo,3$$
$$(\vec{oa}, \vec{ob}) \rightarrow \vec{oa} + \vec{ob} = \vec{oc}$$

Se denomina vector suma al vector resultante: $\vec{oc} = \vec{oa} + \vec{ob}$

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,3

La multiplicación externa en Vo,3 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

$$\bullet : IR \times Vo,3 \rightarrow Vo,3$$
$$(k, \vec{oa}) \rightarrow k \bullet \vec{oa} = \vec{ob}$$

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: $\vec{ob} = k \bullet \vec{oa}$

De similar forma se puede extender a Vo,n, que es el conjunto de todos los vectores fijos del espacio n-dimensional.

Adición en Vo,n

En Vo,n , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

$$+: Vo,n \times Vo,n \rightarrow Vo,n$$
$$(\vec{oa}, \vec{ob}) \rightarrow \vec{oa} + \vec{ob} = \vec{oc}$$

Se denomina vector suma al vector resultante: $\vec{oc} = \vec{oa} + \vec{ob}$.

Propiedades de la suma en Vo,n

- Asociativa

$(\vec{oa} + \vec{ob}) + \vec{oc} = \vec{oa} + (\vec{ob} + \vec{oc})$, siendo $\vec{oa}$, $\vec{ob}$ y $\vec{oc}$ vectores de Vo,n.

- Conmutativa

$\vec{oa} + \vec{ob} = \vec{ob} + \vec{oa}$, siendo $\vec{oa}$ y $\vec{ob}$ vectores de Vo,n.

- Elemento neutro

Existe el vector nulo $\vec{oo}$ de Vo,n, tal que para todo vector $\vec{oa}$ de Vo,n, se verifica que:

$$\vec{oa} + \vec{oo} = \vec{oo} + \vec{oa} = \vec{oa}$$

- Elemento opuesto

Para todo vector $\vec{oa}$ de Vo,n, existe su vector opuesto - $\vec{oa}$ de Vo,n, tal que:

$$\vec{oa} + (-\vec{oa}) = (-\vec{oa}) + \vec{oa} = \vec{oo}$$

<u>Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n</u>

La multiplicación externa en Vo,n es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

$$\bullet : \mathbb{IR} \text{ X } V_{o,n} \to V_{o,n}$$
$$(k, \vec{oa}) \to k \bullet \vec{oa} = \vec{ob}$$

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: $\vec{ob} = k \bullet \vec{oa}$

<u>Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n</u>

Siendo $\vec{oa}$ y $\vec{ob}$ vectores de $V_{o,n}$, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:

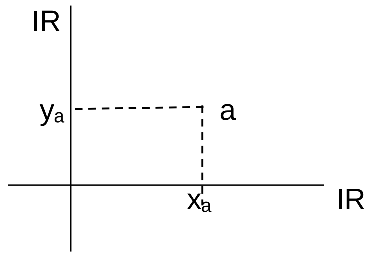
- $t \bullet (\vec{oa} + \vec{ob}) = t \bullet \vec{oa} + t \bullet \vec{ob}$
- $(t+k) \bullet \vec{oa} = t \bullet \vec{oa} + k \bullet \vec{oa}$
- $(t.k) \bullet \vec{oa} = t \bullet (k \bullet \vec{oa})$
- $1 \bullet \vec{oa} = \vec{oa}$

<u>Nota</u>: el producto de un número real t por un vector v es un nuevo vector t • v, que tiene la misma dirección que v, el mismo sentido que v si t > 0, o sentido opuesto si t < 0.

❖ *Sugerencia: realizar el Ejercicio 1.*

- **Componentes de un vector de $\mathbb{IR}^2$ y $\mathbb{IR}^3$**

En el plano IR x IR = $\mathbb{IR}^2$ es posible identificar a cada punto con un par de números reales que son sus coordenadas, por ejemplo considere el punto $a = (x_a, y_a)$. Estas coordenadas permiten representar ese punto en el plano IR^2.



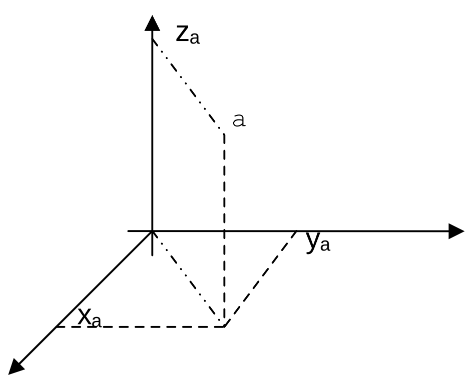
Si además del punto $a = (x_a , y_a)$ se considera el punto $o = (x_o , y_o)$, las componentes de un vector $u = \overrightarrow{oa}$, en el plano IR^2, se determinan como :

$$u = \overrightarrow{oa} = (x_a - x_o , y_a - y_o)$$

De este modo, los vectores del plano quedan asociados de manera única con un par de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y) de IR^2.

- *Sugerencia: realizar los Ejercicios 2 y 3.*

En el espacio IR x IR x IR = IR^3 es posible identificar a cada punto con una terna ordenada de números reales, que son sus coordenadas, por ejemplo considere al punto $a = (x_a , y_a , z_a)$.



Si además del punto $a = (x_a , y_a, z_a)$ se considera el punto $o = (x_o , y_o , z_o)$, las componentes de un vector $u = \overrightarrow{oa}$, en el espacio IR^3, se determinan como :

$$u = \overrightarrow{oa} = (x_a - x_o , y_a - y_o, z_a - z_o)$$

Los vectores del espacio tridimensional quedan asociados de manera única con una terna de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y, z) de IR^3.

Si las coordenadas del punto o fueran: o = (0, 0) en el plano IR^2, o bien o = (0, 0, 0) en el espacio IR^3, las componentes del vector u coincidirían con las coordenadas del punto a, sólo en ese caso.

- *Sugerencia: realizar los Ejercicios 4 y 5.*

En el espacio IR x … x IR = IR^n es posible identificar a cada punto con una n-upla ordenada de números reales, que son sus coordenadas, por ejemplo el punto a = (x_1 ,x_2, … , x_n).
Si además del punto "a" se considera el punto o = (y_1 , y_2 ,…, y_n), las componentes de un vector u = $\overrightarrow{oa}$, en el espacio IR^n , se determinan como :

$$u = \overrightarrow{oa} = (x_1 - y_1 , x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

Los vectores del espacio n-dimensional quedan asociados de manera única con una n-upla de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x_1, x_2 ,…, x_n) de IR^n.

<u>Ejemplo</u>

Coordenadas del punto medio de un segmento

Dado un segmento ab de puntos de IR^n, se pueden encontrar las coordenadas de su punto medio m, conociendo las coordenadas de los putos a = (x_1 ,x_2, … , x_n) y b = (x'_1 ,x'_2, … , x'_n).
El punto medio del segmento tendrá coordenadas:

$$m = \left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{x_2 + x_2'}{2}, \ldots, \frac{x_n + x_n'}{2} \right)$$

- **Adición o suma en IR^2**

En IR^2, la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

$$\begin{aligned} +:\ & IR^2 \times IR^2 \to IR^2 \\ & (u, v) \to u+v = w \end{aligned}$$

Se denomina vector suma al vector resultante: w = u+v.

Es decir, si u = (x, y) de IR^2 , y v = (x_0 ,y_0) de IR^2 , la suma u+v es el vector w de componentes:

w = u+v = ($x+x_0$,$y+y_0$) (simplemente se suma componente a componente).

Propiedades de la suma en IR^2

- Asociativa

$(u+v) + w = u + (v+w)$, siendo u, v y w vectores de IR^2

- Conmutativa

$u+ v= v + u$, siendo u y v vectores de IR^2

- Elemento neutro

Existe el vector nulo $o = (0, 0)$ de IR^2, tal que para todo vector u de IR^2, se verifica que:

$$o + u = u + o = u$$

- Elemento opuesto

Para todo vector u de IR^2, existe su vector opuesto – u de IR^2, tal que:

$$u + (- u) = (-u) + u = o$$

- **Multiplicación de un escalar por un vector de IR^2**

La multiplicación externa en IR^2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

$$\bullet : IR \times IR^2 \rightarrow IR^2$$
$$(k, u) \rightarrow k \bullet u = w$$

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: $w= k \bullet u$

Dados $u = (x, y)$ de IR^2 y λ de IR, el producto $\lambda \bullet u$ es el vector w de componentes:

$w = \lambda \bullet u = (\lambda x, \lambda y)$ (se multiplica el número por cada una de las componentes del vector original).

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IR^2

Siendo u y v vectores de IR^2, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:

- $t\bullet (u + v)= t \bullet u + t \bullet v$
- $(t+k) \bullet u= t \bullet u+ k \bullet u$
- $(t.k) \bullet u= t.(k \bullet u)$
- $1 \bullet u= u$

Estando definidas la suma en IR^2 y la multiplicación de un real por un elemento de IR^2, y verificando estas ocho propiedades, se dice que **IR^2 es un Espacio vectorial** sobre IR, o es un IR- espacio vectorial.

- *Sugerencia: realizar los Ejercicios 6 y 7.*

- **Adición o suma en IR^3**

En IR^2, la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

$$+: IR^3 \times IR^3 \rightarrow IR^3$$
$$(u, v) \rightarrow u+v = w$$

Se denomina vector suma al vector resultante: w = u+v.

Es decir, si u = (x, y, z) de IR^3 , y v = (x_0 ,y_0 , z_0) de IR^3 , la suma u+v es el vector w de componentes:

$$w = u + v = (x+x_0 , y+y_0 , z+z_0)$$ (simplemente se suma componente a componente).

Propiedades de la suma en IR^3

- Asociativa

(u+v) + w = u + (v+w), siendo u, v y w vectores de IR^3

- Conmutativa

u+ v= v + u, siendo u y v vectores de IR^3

- Elemento neutro

Existe el vector nulo o = (0, 0, 0) de IR^3, tal que para todo vector u de IR^3, se verifica que:

$$o + u = u + o = u$$

- Elemento opuesto

Para todo vector u de IR^3, existe su vector opuesto – u de IR^3, tal que:

$$u + (- u) = (-u) + u = o$$

- **Multiplicación de un escalar por un vector de IR^3**

La multiplicación externa en IR^3 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

$$\bullet : IR \times IR^3 \rightarrow IR^3$$
$$(k, u) \rightarrow k \bullet u = w$$

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: w= k • u

Dados u = (x, y, z) de IR^3 y λ de IR, el producto λ•u es el vector w de componentes:

w = λ•u = (λx, λy, λz) (se multiplica el número real por cada una de las componentes del vector original).

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IR^3

Siendo u y v vectores de IR^3, y t y k escalares reales cualesquiera, se verifica que:

- t • (u + v)= t • u + t • v
- (t+k) • u= t • u+ k • u
- (t.k) • u= t.(k • u)
- 1 • u= u

Estando definidas la suma en IR^3 y la multiplicación de un real por un elemento de IR^3, y verificando estas ocho propiedades, se dice que **IR^3 es un Espacio vectorial** sobre IR, o es un IR- espacio vectorial.

❖ *Sugerencia: realizar los Ejercicios 8 y 9.*

En general, se pueden definir la suma y el producto por un escalar real en el espacio IR^n.

Dados u = $(x_1,..,x_n)$ de IR^n y v = $(y_1,..,y_n)$ de IR^n , la suma u+v es el vector de w componentes:

$$w = u + v = (x_1,...,x_n) + (y_1,...,y_n)\ (x_1 +y_1,...,x_n +y_n)$$

Dados v = $(x_1,...,x_n)$ de IR^n y λ de IR, el producto λ.v es el vector w de componentes:

$$w = \lambda.v = \lambda.(x_1,...,x_n) = (\lambda x_1,...,\lambda x_n)$$

Propiedades de la suma en IR^n

- Asociativa

(u+v) + w= u+(v+w), siendo u,v y w vectores de IR^n

- Conmutativa

u+v= v+u, siendo u y v vectores de IR^n

- Elemento neutro

Existe el vector nulo o = (0, 0, …, 0) de IR^n, tal que para todo vector u de IR^n, se verifica que:

$$u + o = o + u = u$$

- Elemento opuesto

Para todo vector u de IR^n, existe su vector opuesto – u de IR^n, tal que:

$$u + (-u) = (-u) + u = o$$

<u>Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IR^n</u>

Siendo u y v vectores de IR^n, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:

- $t \bullet (u + v) = t \bullet u + t \bullet v$
- $(t+k) \bullet u = t \bullet u + k \bullet u$
- $(t.k) \bullet u = t.(k \bullet u)$
- $1 \bullet u = u$

El conjunto IR^n con las operaciones de suma y con la multiplicación por un escalar real, verificando todas las propiedades enunciadas, definen el **Espacio vectorial IR^n (IR).**

- **Dependencia e independencia lineal**

<u>Familia de vectores</u>

Un conjunto ordenado de vectores: F = { u_1, u_2, ... , u_m } del espacio vectorial IR^n (IR) se denomina **familia** de vectores.

<u>Combinaciones lineales</u>

Sea el espacio vectorial IR^n (IR) y una familia de vectores F = {u_1, u_2, ... , u_m }, se dice que un vector w de IR^n es una combinación lineal de los vectores de F, si existen los escalares k_1, k_2,…., k_m , tal que w se puede expresar en la forma:

$w = k_1.u_1 + k_2.u_2 + \ldots + k_m.u_m$, en donde $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son elementos de IR

Si el vector w de V es el vector nulo, entonces la combinación lineal es:

$\vec{0} = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_m u_m$, denominada **combinación trivial**.

❖ *Sugerencia: realizar los Ejercicios 10, 11 y 12.*

Familia libre y familia ligada

Sea la familia F = {u_1, u_2, ... , u_m}, si en la combinación trivial $\vec{0} = k_1 u_1 + k_2 u_2 + ... + k_m u_m$, resulta que todos los escalares son nulos, es decir: $k_1 = 0 = ... = k_m = 0$, entonces la familia de vectores F recibe el nombre de **familia libre.**

En el caso contrario, si al menos uno de los escalares es no nulo, la familia F se denomina **ligada**.

Vectores linealmente dependientes e independientes

Un conjunto de vectores {v_1,...,v_n} se dice que es **linealmente independiente** si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial, es decir, si siempre que se tenga: $\vec{0} = k_1 u_1 + k_2 u_2 + ... + k_m u_m$, entonces $k_i = 0$ para cada i. En caso contrario, se dice que son **linealmente dependientes**.

Los vectores de una familia libre son linealmente independientes, esto significa que ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia. Los vectores de una familia ligada son linealmente dependientes.

❖ *Sugerencia: realizar el Ejercicio 13 y 14.*

- **Norma o módulo de un vector y sus propiedades**

Existe una función que asigna a cada vector u de IR^n , un número real, verificando ciertas condiciones. Esa función recibe el nombre de norma o módulo del vector:

$$\| \ \| : IR^n \to IR$$
$$u \to \| u \|$$

Condiciones:

Siendo u y v vectores de IR^n y t un escalar real:

- $\| u \| \geq 0 \wedge (\| u \| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0})$
- $\| t . u \| = | t | . \| u \|$
- $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ (Desigualdad triangular)

Norma usual

Considerando IR^2 y IR^3 , que serán los espacios vectoriales que se abordarán durante este curso, se define la norma o módulo usual de la siguiente manera:

Si u = (x, y) de IR^2 , $\| u \| = +\sqrt{x^2+y^2}$

Si u = (x, y, z) de IR^3 , $\| u \| = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- *Sugerencia: realizar los Ejercicios 15, 16 y 17.*

Vectores normados:

Se denominan vectores normados o unitarios, a aquellos cuya norma o módulo es igual a uno, es decir u es un vector normado si $\| u \| = 1$.

Si un vector v no nulo, tiene norma distinta de uno, es posible encontrar a partir de v un vector normado. Para ello es suficiente con multiplicar al vector v por el número real inverso de su norma o módulo, es decir:

$$v \neq \vec{0} \ \text{ y } \ \| v \| \neq 1, \text{ el vector } w = \frac{1}{\|v\|}.v \text{ es normado}$$

- *Sugerencia: realizar el Ejercicio 18.*

- **Producto interior o escalar y sus propiedades**

Existe una función tal que a cada par de vectores de IR^n, le asigna un número real, cumpliendo ciertos requisitos, esta función recibe el nombre de producto escalar o producto punto.

$$\bullet : IR^n \times IR^n \to IR$$
$$(u, v) \to u \bullet v$$

Condiciones:

Para todo u, para todo v y para todo w del espacio IR^n , y para cualquier t de IR:

$u \bullet u \geq 0 \wedge (u \bullet u = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0})$

$u \bullet v = v \bullet u$

$u \bullet (v + w) = (u \bullet v) + (u \bullet w)$

$t.(u \bullet v) = u \bullet (t . v)$

Producto escalar usual o euclideo

Considerando IR^2 y IR^3 ,el producto escalar usual se determina de la siguiente manera:

Si u = (x_1, y_1) de IR^2 y v = (x_2, y_2) de IR^2 $u \bullet v = x_1.x_2 + y_1.y_2$

Si u = (x_1, y_1, z_1) de IR^3 y v = (x_2, y_2, z_2) de IR^3 $u \bullet v = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$

Sea u de IR^n, se verifica que: $\| u \|^2 = u \bullet u$, es decir $\| u \| = +\sqrt{u \bullet u}$

Si u = (x, y) de IR^2 , $\| u \| = +\sqrt{u \bullet u} = +\sqrt{x^2 + y^2}$

Si u = (x, y, z) de IR^3 , $\| u \| = +\sqrt{u \bullet u} = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- *Sugerencia: realizar los Ejercicios 19 y 20.*

<u>Vectores ortogonales</u>

Si el producto escalar entre dos vectores es cero, se dice que esos vectores son ortogonales:

$$\mathbf{u \bullet v = 0 \;\Leftrightarrow\; u \perp v}$$

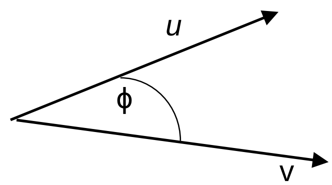
Si alguno de ellos fuera el vector nulo, el producto escalar indefectiblemente es cero, lo que indica que el vector nulo es ortogonal a cualquier otro vector.

- *Sugerencia: realizar los Ejercicios 21, 22 y 23.*

- **Ángulo entre vectores**

Dados dos vectores u y v de IR^n , distintos del vector nulo, definimos el ángulo determinado por u y v, como el único ángulo ϕ obtenido: $\phi = \arccos\left(\dfrac{u \bullet v}{\|u\|\|v\|} \right)$

Es decir: $\mathbf{u \bullet v = \| u \| . \| v \| . \cos \phi}$



- *Sugerencia: realizar los Ejercicios 24 y 25.*

- **Distancia entre vectores en función de la norma**

Sean dos vectores u y v de IR^n , se define la distancia entre u y v, y se anota d(u, v):

$$\mathbf{d(u, v) = \| u - v \| = \| v - u \|}$$

Si u = (x_1, y_1) de IR^2 y v = (x_2, y_2) de IR^2

$$d(u, v) = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si u = (x_1, y_1, z_1) de IR^3 y v = (x_2, y_2, z_2) de IR^3

$$d(u, v) = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

❖ *Sugerencia: realizar el Ejercicio 26.*

- **Producto cruz o vectorial de vectores del espacio tridimensional y sus propiedades**

Entre los vectores del espacio real IR^3 ,existe una función denominada producto vectorial, que asigna a cada par de vectores un único vector que es ortogonal a ambos. Su esquema funcional es el siguiente:

$$x : IR^3 \ x \ IR^3 \rightarrow IR^3$$
$$(u, v) \rightarrow u \times v$$

Determinación de las componentes del vector u x v:

Si u = (u_1, u_2, u_3) de IR^3 y v = (v_1, v_2, v_3) de IR^3

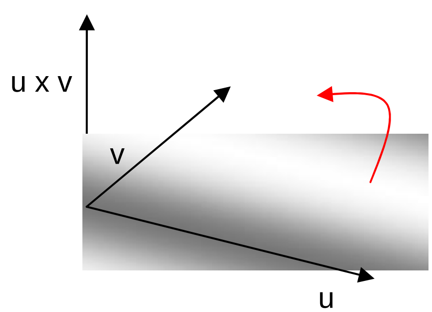
$$\mathbf{w = uxv = (u_2v_3\text{-}u_3v_2,\ u_3v_1\text{-}u_1v_3,\ u_1v_2\text{-}u_2v_1)}$$

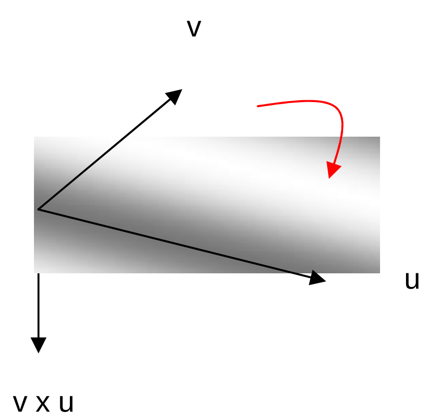
o con la notación de determinantes:

$$w = uxv = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

La recta sostén del vector (u x v) es perpendicular al plano que determinan u y v.

El sentido del vector (u x v) se determina a partir de la regla de la mano derecha, una representación gráfica de la situación es la siguiente:





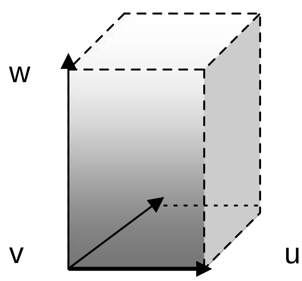
Propiedades del producto vectorial:

- u x v = - (v x u)
- u x(v+w)= (u x v)+(u x w)
- (u+v) x w=(u x w)+(v x w)
- K(u x v)=(ku) x v=u x (kv)
- u x $\vec{0}=\vec{0}$ x u=$\vec{0}$
- u x u=$\vec{0}$

❖ *Sugerencia: realizar los Ejercicios 27, 28 y 29.*

- **Producto mixto**

El producto mixto entre vectores de IR^3 es el número real que se obtiene a través de la siguiente expresión: **u • (v x w) = (u x v) • w**



Si u = (u_1, u_2, u_3) de IR^3 , v = (v_1, v_2, v_3) de IR^3 y w = (w_1, w_2, w_3) de IR^3

$$\mathbf{u \bullet (v \times w) = u_1.(v_2.w_3 - w_2.v_3) + u_2.(v_3.w_1 - w_3.v_1) + u_3. (v_1.w_2 - w_1.v_2)}$$

Este número real obtenido (en valor absoluto), representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores u, v y w.

❖ *Sugerencia: realizar el Ejercicio 30.*

Teorema

Si u y v son vectores de IR^3, entonces:

a) u• (u x v) = 0 ***(u x v es ortogonal a u)***
b) v• (u x v) = 0 ***(uxv es ortogonal a v)***
c) II u x v II ^{2} = II u II^2 II v II^2 – (u • v)^2 ***(Identidad de Lagrange)***

Demostración

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ de IR^3 y $v = (v_1, v_2, v_3)$ de IR^3

$u \times v = (u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2- u_2v_1)$

Por a)

$u \bullet (u \times v)= (u_1, u_2, u_3) \bullet (u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2- u_2v_1) = u_1(u_2v_3-u_3v_2) + u_2(u_3v_1-u_1v_3) + u_3(u_1v_2- u_2v_1) = 0$

Recordando que $|| u ||^2 = u \bullet u$

$|| u \times v ||^2 = (u \times v) \bullet (u \times v) = (u_2v_3-u_3v_2)^2 + (u_3v_1-u_1v_3)^2 + (u_1v_2- u_2v_1)^2$

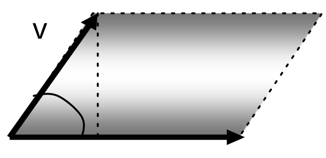
Además

$|| u ||^2 . || v ||^2 – (u \bullet v)^2 = (u_1^2+ u_2^2+ u_3^2) (v_1^2+ v_2^2 + v_3^2) – (u_1v_1 +u_2v_2 + u_3 v_3)^2$

Al efectuar los productos y por propiedad distributiva, se puede llegar a la identidad de Lagrange

$$\mathbf{|| uxv ||^2 = || u ||^2 || v ||^2 – (u \bullet v)^2}$$

La identidad de Lagrange, tiene una aplicación geométrica muy útil, ya que se puede demostrar que la norma o modulo del vector uXv coincide con el área del paralelogramo que determinan los vectores u y v.



Si ϕ denota el ángulo entre los vectores u y v, entonces $u \bullet v = || u || . || v || . \cos \phi$, de modo que reemplazando en la identidad de Lagrange:

$$|| uxv ||^2 = || u ||^2 || v ||^2 – (u \bullet v)^2$$
$$|| uxv ||^2 = ||u||^2 ||v||^2 – (|| u || . || v || . \cos \phi)^2$$
$$|| uxv ||^2 = ||u||^2 ||v||^2 – || u ||^2 . || v ||^2 . \cos^2 \phi$$
$$|| uxv ||^2 = ||u||^2 ||v||^2 (1 - \cos^2 \phi)$$
$$|| uxv ||^2 = ||u||^2 ||v||^2 \operatorname{sen}^2 \phi$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{|| uxv || = || u || .|| v || \operatorname{sen} \phi}$$

En la figura anterior la medida de la altura del paralelogramo determinado por u y v, está dada por: **$|| v || \operatorname{sen} \phi$,** por consiguiente el área de dicha figura es:

$$\mathbf{Area = || u || .|| v || .\operatorname{sen} \phi = || uxv ||}$$

- *Sugerencia: realizar el Ejercicio 31.*