Primer Semestre 2020

INGRESO MATEMÁTICA

Unidad Nº1:

“Nociones de conjuntos – Conjuntos numéricos”

CONJUNTOS

- Podemos decir que un **CONJUNTO** es cualquier colección de objetos, individuos o entes.
- Todo objeto que integra un conjunto recibe el nombre de **ELEMENTO** (o Miembro) del conjunto.

¿Cómo definimos un conjunto?

Debemos describir de manera precisa cuáles son los elementos de dicho conjunto.

Por extensión

Por comprensión

CONJUNTOS

- A los conjuntos los designamos con letra mayúscula A, B, C, X, Y,....
- *A sus elementos los escribimos por letras minúsculas, números, símbolos, signos específicos, nombres, etc.*
- Los elementos se encierran entre llaves y se separan por una coma.

Por extensión Ej: $A = \{1 , 3 , 5 , 7 , 9 \}$

Por comprensión Ej: $A = \{x \mid x \text{ es natural e impar y } x \leq 9\}$

- Si 3 es un elemento de un conjunto A escribimos $3 \in A$
- Si 2 no es un elemento de un conjunto A escribimos $2 \notin A$

SUBCONJUNTOS

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5\} \quad \text{y} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Los elementos de A: $1, 3$ y 5, <u>también son</u> elementos de B.

Decimos entonces que A es un ***subconjunto***de B, o que A está ***incluido*** *en* B.

Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B. Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está *incluido* o *contenido* en B.

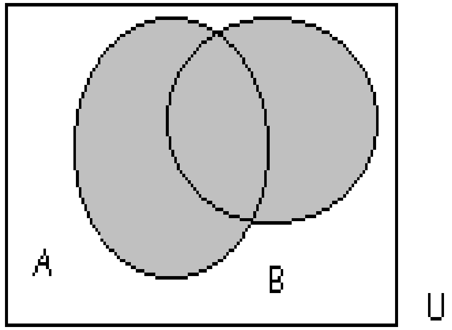
$$A \subseteq B \underset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x: \; x \in A \Longrightarrow x \in B$$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS: UNIÓN

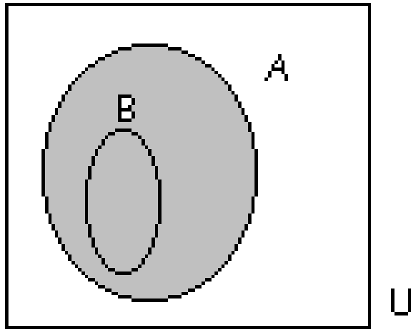
Sean A y B dos conjuntos

La unión $A \cup B$ de A con B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B.

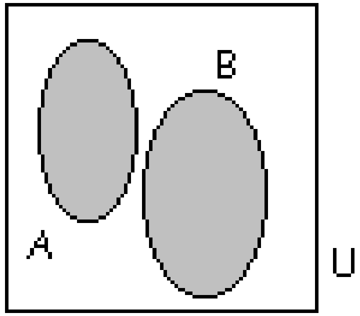
$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$



$A \cup B$



$A \cup B = A$



$A \cup B$

Por lo tanto, para que un elemento pertenezca a la unión de dos o más conjuntos, **basta que pertenezca a uno** de los conjuntos en cuestión

PROPIEDADES DE LA UNIÓN

Ejemplos

- Si $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,5\}$, entonces $A \cup B = \{1,2,3,5\}$.

- Si consideramos el intervalo abierto $(0,1)$ y el conjunto de dos elementos $\{0,1\}$, entonces $(0,1) \cup \{0,1\} = [0,1]$

PROPIEDADES DE LA UNIÓN

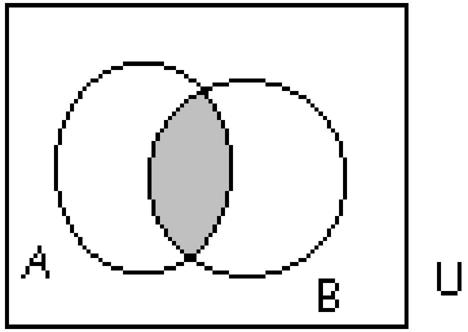
1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup A = A$
3. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS: INTERSECCIÓN

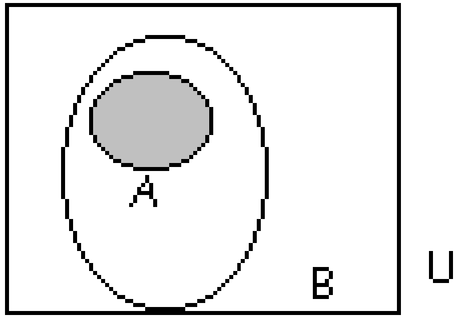
Sean A y B dos conjuntos

La *intersección* $A \cap B$ entre A y B *es el conjunto cuyos elementos pertenecen a* A *y pertenecen a* B.

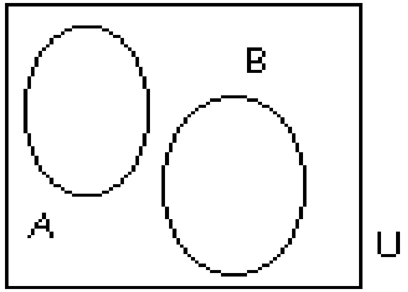
$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$



$$A \cap B$$



$$A \cap B = A$$



$$A \cap B = \varnothing$$

Conjuntos disjuntos o mutuamente excluyentes: son aquellos que no tienen elementos comunes

Por lo tanto, para que un elemento pertenezca a la intersección de dos o más conjuntos, debe pertenecer a **todos** de los conjuntos en cuestión

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

Ejemplos

- Sean $U = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \leq 11\}$, $P = \{n \mid n\, es\, primo\}$ entonces

$$A \cap P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. Si A es un subconjunto de B, esto es $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$.

CONJUNTOS NUMÉRICOS: Los Naturales ($\mathbb{N}$) y Los Enteros ($\mathbb{Z}$)

- Los conjuntos numéricos se van ampliando a medida que se necesitan resolver ciertas problemáticas de la vida diaria.
- El conjunto de los **NÚMEROS NATURALES** ($\mathbb{N}$)está constituido por los números 1, 2, 3, 4, 5,...

$$\mathbb{N} = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,\ldots.\ \}$$

- Los **NÚMEROS ENTEROS** ($\mathbb{Z}$)son los números naturales, junto con los negativos y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\,, 1\,, 2\,, 3, \ldots..\}$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS: Los Racionales ($\mathbb{Q}$)

El cociente entre dos números enteros no siempre es otro número entero

El cociente de dos números enteros a y b, (con $b \neq 0$) solamente será un entero cuando b sea divisor de a

→ Pero si no es así será un **número fraccionario**

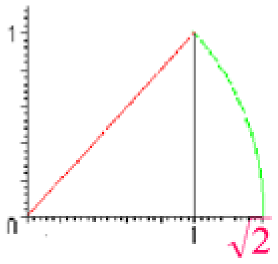
El conjunto de los números enteros unido al conjunto de todas las fracciones constituye el conjunto de los NÚMEROSRACIONALES, al que denotamos por $\mathbb{Q}$.

Un número racional $\frac{a}{b}$ es el cociente de dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, siendo a el numerador y b el denominador.

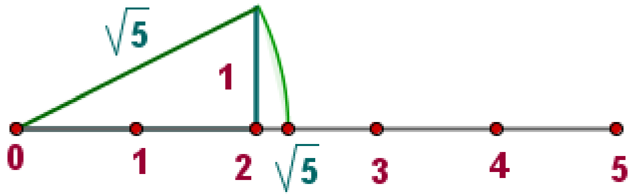
CONJUNTOS NUMÉRICOS: Los Irracionales (I)

Existen números como:

$\sqrt{2}$



$\sqrt{5}$



$\sqrt[3]{2}$ π e

que no se pueden escribir como cociente de dos enteros. Estos números son llamados de **IRRACIONALES**

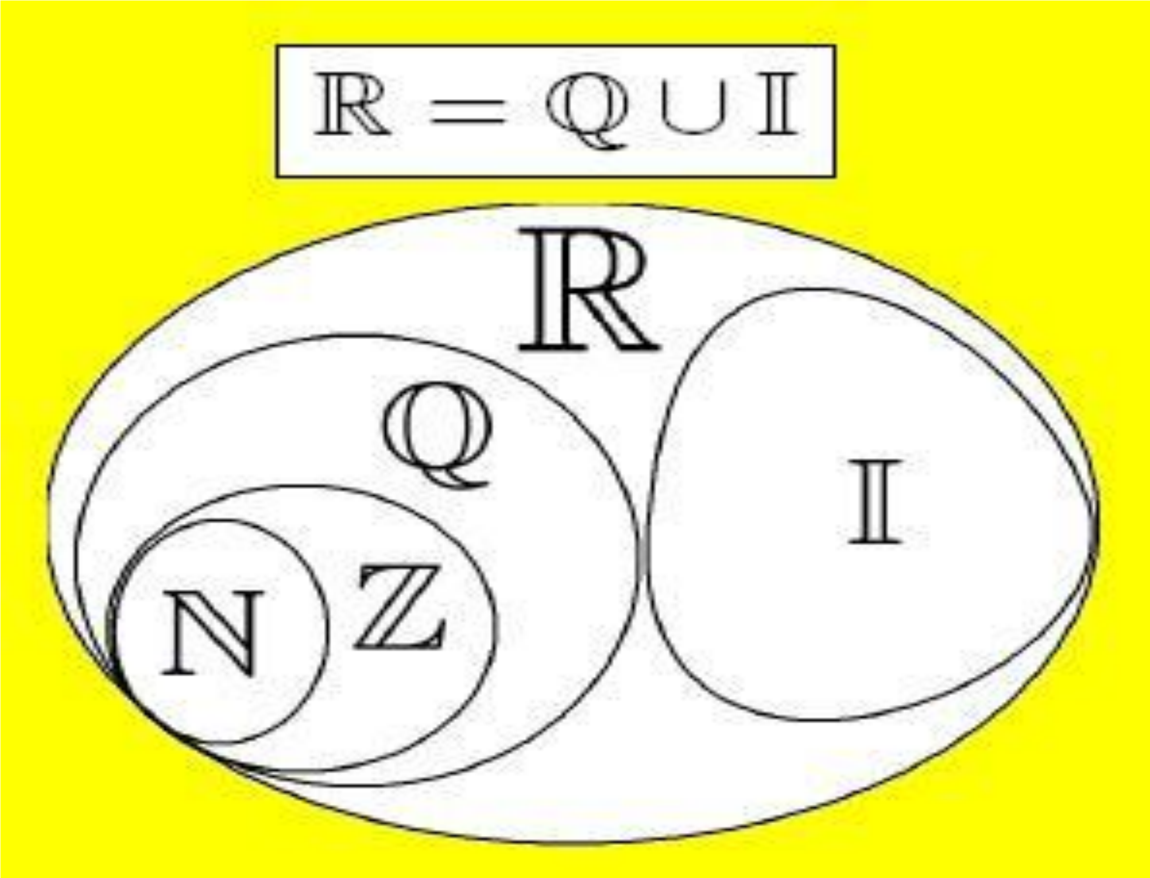
CONJUNTOS NUMÉRICOS: Los Reales ($\mathbb{R}$)

El conjunto de los números **RACIONALES** UNIÓN el conjunto de los números **IRRACIONALES** forman el conjunto de los números **REALES**

ESTE CONJUNTO ES DENOTADO CON LA LETRA $\mathbb{R}$

LOS NÚMEROS REALES

Gráficamente



CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS REALES

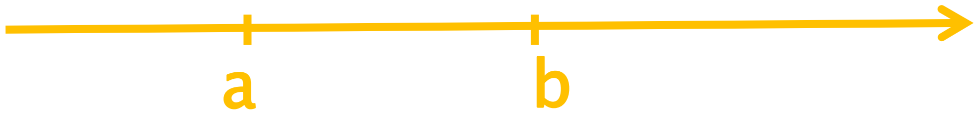
Es un conjunto:

- Infinito
- Ordenado
- No tiene Primer Elemento
- No tiene Último Elemento
- Entre dos números reales existen infinitos números reales, por eso se dice que el conjunto es DENSO.

REALCIONES DE MAYOR$(<)$ Y MENOR $(>)$

Por ser un conjunto **Ordenado** decimos que a es menor que b y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo

Geométricamente a se encuentra a la <u>izquierda</u> de b en la recta real



Es equivalente $a < b$ a $b > a$ y se lee "b mayor que a"

El símbolo $a \leq b$ se lee: " a es mayor o igual que b " y significa que $a < b$ o $a = b$

USO DE LA PROLPIEDAD DISTRIBUTIVA

a) $2 . (x + 3) = 2 . x + 2 . 3$ Propiedad distributiva

$2 . (x + 3) = 2x + 6$ Simplificación

b) $(a+b) . (x+y) = (a+b)\, x + (a+b) y$ Propiedad distributiva

$(a+b) . (x+y) = (ax + bx) + (ay + by)$ Propiedad distributiva

$(a+b) . (x+y) = ax + bx + ay + by$ Propiedad asociativa de la suma

REPASO DE LAS OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA

- La **suma** de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Ejemplo: $$\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=\frac{4+7}{3}=\frac{11}{3}$$

- Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{b.d}$$

Ejemplo: $$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{8+15}{12}=\frac{23}{12}$$

12 es el Mínimo Común Denominador

O el menor de los múltiplos comunes (MCM)

REPASO DE LAS OPERACIONES CON FRACCIONES

MULTIPLICACIÓN

- El **producto** de varias fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}$$

DIVISIÓN

- La división entre dos fracciones es otra fracción que surge al multiplicar la primer fracción por la inversa de la segunda fracción.

Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene inverso multiplicativo $\Leftrightarrow a\neq 0$ y su inverso es $\frac{b}{a}$

Luego $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3}:\frac{1}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{20}{3}$$

VALOR ABSOLUTO

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO

Se llama **módulo** o **valorabsoluto** de un número real $\boldsymbol{a}$ a la distancia que existe entre dicho número y el cero.

Se simboliza $|\boldsymbol{a}|$

Por el hecho de ser una distancia, el módulo nunca toma valores negativos.

Definición: Si $\boldsymbol{a}$ es un número real

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & si \quad a \geq 0 \\ -\boldsymbol{a} & si \quad a < 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

1. $|a| = |-a|$

2. $|ab| = |a|\,|b|$

3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

4. $|a^n| = |a|^n$

Recuerde SIEMPRE que $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

INTERVALOS

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

OPERACIONES EN $\mathbb{R}$:POTENCIACIÓN

$$\boxed{5\,.\,5\,.\,5 \;\; se\ escribe\ como\ 5^3}$$

Notación exponencial

Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces la **potencia n-ésima** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base** y n es el **exponente**.

LEYES DE LOS EXPONENTES

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

5. $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

LEYES DE LOS EXPONENTES

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2}$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^{m}}{a^{n}}$	$\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^{5}}{3^{2}}$	Para pasar un número elevado a una potencia desde el numerador al denominador o desde el denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

OPERACIONES EN $\mathbb{R}$: RADICACIÓN

Definición de la raíz n-ésima

Si n es un entero positivo, entonces la **raíz n-ésima principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{quiere decir} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Propiedades de las raíces n-ésimas

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

EXPONENTES RACIONALES

$$\boxed{(a^{1/n})^n = a^{\left(\frac{1}{n}\right)n} = a^1 = a}$$

Según la definición de raíz n–ésima

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

$$\boxed{\text{Pues haciendo } a^{1/n} = b}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \text{ quiere decir } b^n = a}$$

EXPONENTES RACIONALES

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional m/n de los términos más bajos, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \text{o en forma equivalente} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$ $\Rightarrow$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\,\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ Multiplicación del numerador o del denominador por el radical conjugado

$= \dfrac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}$ Fórmula 1 para los productos especiales

$= \dfrac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Notación científica

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

$$4 \times 10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$$

Mover el punto decimal 13 lugares a la derecha.

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mover el punto decimal 24 lugares a la izquierda.