**Unidad 2: Matrices y determinantes**

**Matrices**

Una matriz es un arreglo de elementos en filas y columnas, su tamaño se describe especificando el número de filas y luego el de columnas. Si A es una matriz, se usará aij para denotar el elemento que está en la fila i y en la columna j de A. Así, una matriz de **orden** **mxn** podrá representarse:

A = ****

Otra forma de expresar la matriz A , es A = (aij), con i variando de 1 a m, y j variando de 1 a n.

Una matriz B con n filas y n columnas se denomina **matriz cuadrada** **de orden n**, y se dice que los elementos b11, b22,..., bnn , están en la diagonal principal de B:

 B = ****

Ejemplos:

A =  , A es de orden 1x1

B = ** ,** B es de orden 2x2

C =  , C es de orden 3x3

Dos matrices A y B son **iguales** si tienen el mismo número de filas y columnas, y además todos sus componentes (i, j) son iguales, es decir, a i j = b i j para cualesquiera i, j.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 1*

**Clasificación de matrices**

Una matriz que esté formada por una sola columna, se llama **matriz columna**, análogamente, una matriz formada por una única fila se llama **matriz fila**.

B = es una matriz columna y A =  es una matriz fila.

Una matriz de orden mxn cuyos elementos son todos cero, se denomina **matriz nula**.

0 = ****

Si A es una matriz de orden mxn, su **matriz opuesta** es una matriz del mismo orden, cuyos elementos son los elementos opuestos de cada uno de los de A. Se representa por –A.

Si A = **** luego  **-**A =**** es su matriz opuesta

Si A es una matriz de orden mxn, su **matriz transpuesta** es una matriz de orden nxm cuyas filas son las columnas de A. Se representa por At o AT.

Si A = **** luego At = **** es su matriz transpuesta

Una matriz se dice que es **simétrica** si es igual a su transpuesta. Para ello deberá tener el mismo número de filas que de columnas, es decir deberá ser una matriz cuadrada.

C = **** es una matriz simétrica

Si una matriz A es igual a la opuesta de su transpuesta, se dice que es **antisimétrica**.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 2*

Una matriz cuadrada se dice **diagona**l si todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

D = **** es una matriz diagonal

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 3*

Una matriz diagonal de orden n, que posee todos sus elementos iguales a uno, se llama **matriz identidad.**

I = **** es la matriz identidad de orden n

Una matriz cuadrada se dice **triangular superior**, si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

E = **** es una matriz triangular superior

Una matriz cuadrada se dice **triangular inferior** si todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

F = **** es una matriz triangular superior

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 4*

**Suma de matrices y sus propiedades**

Si A y B son matrices del mismo orden mxn, se define la matriz A + B como una matriz también de orden mxn, cuyas componentes se obtienen sumando las componentes (i, j) de A y B respectivamente. Es decir, si llamamos C = A+B, entonces c i j = a i j + b i j con i variando de 1 a m, y j variando de 1 a n.

Si consideramos al conjunto Mmxn de todas las matrices de orden mxn, entonces la suma de matrices es una operación binaria interna en dicho conjunto, es decir:

 + : Mmxn X Mmxn → Mmxn

 ( A, B) → A+B = C

La suma de matrices verifica las siguientes propiedades:

* Asociativa

Para toda matriz A, B y C del mismo orden se cumple que:

A+ (B+C) = (A+B) +C

* Elemento neutro

Existe la matriz nula de orden mxn, tal que para toda matriz A de orden mxn, se cumple que:

A+0 = 0+A = A

* Elemento opuesto

Para toda matriz A de orden mxn, existe su matriz opuesta –A de orden mxn, tal que:

A+(−A) = (−A) +A = 0.

* Conmutativa

Para toda matriz A de orden mxn y para toda matriz B del mismo orden se cumple que:

A+B = B+A.

* Siendo A y B matrices de orden mxn, At y Bt sus matrices transpuestas y λ un escalar cualquiera, entonces (A + B) t = At + Bt
* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 5*

**Producto de un escalar por una matriz**

Dada una matriz A de orden mxn, y λ un escalar, se puede definir el producto λ.A como una matriz, con el mismo número de filas y columnas que A, y obtenida multiplicando por λ cada componente. Es decir, si C = λ.A, entonces c i j = λ.a i j. con i variando de 1 a m, y j variando de 1 a n.

El producto de un escalar por una matriz cumple las siguientes propiedades:

* Siendo A, B matrices del mismo orden mxn; λ y µ escalares cualesquiera, entonces

λ.(A+B) = λ.A+λ.B,

(λ+µ).A = λ.A+µ.A

(λµ).A = λ(µ.A)

1.A = A.

* Siendo A una matriz de orden mxn, si λ = 0 entonces λ.A = 0.A = 0 (matriz nula de orden mxn)
* Si A = 0 (matriz nula de orden mxn) y λ un escalar cualquiera, entonces λ.A = λ.0 = 0
* Siendo A una matriz de orden mxn, At su matriz transpuesta y λ un escalar cualquiera, entonces (λ.A) t = λ (At)
* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 7 y 8.*

**Multiplicación de matrices y sus propiedades**

Sea A una matriz de orden mxn y B una matriz de orden nxk. Se define el producto A.B como una matriz C, que tendrá orden mxk, y cuya componente c i j se obtiene al multiplicar la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B, es decir: c i j = a i1b 1 j +a i 2 b 2 j +...+a i m b m j, para todo i de 1 a m, y para todo j de 1 a k.

Importante:

Para que A y B se puedan multiplicar, A debe tener tantas columnas como filas tiene B. Además, en tal caso, la matriz producto C = A.B tiene tantas filas como A y tantas columnas como B.

Si k es un numero natural no nulo y A una matriz de orden n, se puede obtener el producto Ak = A…….A (k – veces).

Si A es una matriz cuadrada de orden n y k = 0 , Ak = A0 = I, siendo I la matriz identidad de orden n.

El producto o multiplicación de matrices verifica las siguientes propiedades:

* Asociativa

Para toda matriz A de orden mxn, B de orden nxk y C de orden kxq, se cumple que:

A. (B.C) = (A.B) .C

* Elemento neutro

Existe la matriz identidad de orden n, tal que para toda matriz A de orden n, se cumple que:

A.I = I. A = A

Teniendo en cuenta la suma y el producto de matrices, se cumplen las propiedades:

* Distributiva

Para toda matriz A, B y C cuyos ordenes son tales que puedan efectuarse las operaciones indicadas, se verifica que:

A.(B+C) = A.B+A.C

(A+B).C = A.C +B.C

* Para toda matriz A de orden mxn ,para toda matriz B de orden nxp, y para todo escalar λ se cumple que:

 λ. (A.B) = (λ.A).B= A.( λ.B)

Nota:

* Generalmente la propiedad conmutativa no se cumple para la multiplicación de matrices, salvo pocas excepciones.
* Si A.B = 0, esto no implica que A = 0 ó B = 0.
* Si A, B, C son tres matrices tales que A.B = A.C, no se tiene necesariamente que B = C.
* Tampoco es cierta la igualdad (A + B) 2 = A2 + 2AB + B2, para cualesquiera que sean las matrices A y B.
* Si A es una matriz de orden mxn, entonces Im .A = A y A .In = A.
* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 6.*

**Matrices inversibles**

Dada una matriz A de orden n e I la matriz identidad del mismo orden. Si es posible hallar una matriz B de orden n, tal que A. B = B. A = I, entonces se dice que A es **inversible**, y la matriz B se conoce como la inversa de A. la matriz inversa de A se anota como A-1. La unicidad de la matriz inversa se advierte en el siguiente teorema.

Teorema

***Dada una matriz A de orden n, si tanto B como C son inversas de A, entonces B = C.***

Demostración

Si C es la matriz inversa de A, se verifica que C. A = A. C = I

Suponiendo que B también es la matriz inversa de A, luego se verifica que B. A = A. B = I

Al multiplicar por la derecha en ambos miembros por C resulta: (B.A).C = I. C = C

Pero, por otro lado, por propiedad asociativa: (B.A).C = B.(A.C) = B. I = B

Luego B = C

Como consecuencia del teorema, se puede enunciar que dada una matriz A de orden n, si A es inversible entonces su inversa es A-1 también de orden n, tal que:

**A . A-1 = A-1. A = I**

Siendo I la matriz identidad de orden n.

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es **inversible** o **regular**; en caso contrario recibe el nombre de singular.

Propiedades:

* (A-1) -1= A
* (λ. A) -1 = (1/ λ)·A -1, siendo λ un escalar cualquiera
* (At) –1=(A-1) t, siendo At , la matriz transpuesta de A
* Se dice que una matriz cuadrada es **ortogonal** si el producto de ella por su traspuesta es igual a la matriz identidad: A . At = At . A = I Esto significa que para las matrices ortogonales la matriz inversa coincide con la transpuesta, es decir: At = A -1 , siempre que A sea ortogonal.
* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 9, 10, 11.*

Teorema

***Si A y B son matrices inversibles cuadradas del mismo orden n, entonces:***

* ***A. B es una matriz inversible***
* ***(A·B) -1= B -1. A -1***

Demostración

Si se puede demostrar que: ( A. B) . (B -1. A -1) = (B -1. A -1).(A.B) = I , entonces se habrá establecido simultáneamente que A.B es inversible y que (A·B) -1 = B -1. A -1

Aplicando propiedad asociativa del producto de matrices se cumple que:

1. B). (B -1. A -1) = A .( B. B -1). A -1 = A I . A -1= A . A -1 = I

Análogamente se demuestra que:

 (B -1. A -1).(A.B) = I

Nota:

El teorema puede extenderse para tres o más factores, con lo cual se puede enunciar que un producto de matrices inversibles siempre es inversible, y la inversa del producto es el producto de las inversas en orden inverso.

Teorema

***Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden n, y k un escalar, entonces:***

* ***Si A es inversible, entonces A-1 también es inversible y ( A-1) -1 = A***
* ***Si A es inversible y k ≠ 0, entonces la matriz k.A es inversible y ( k.A) -1 = k -1 . A-1.***
* ***Si A es inversible, también lo es AT y además ( AT) -1 = (A -1)T.***

Teorema

***Si A es una matriz inversible de orden n, entonces para cada matriz columna B de orden nx1, el sistema de ecuaciones A. X = B tiene exactamente una solución, a saber, X = A -1 .B.***

Demostración

Considerando el sistema A. X = B y puesto que A ( A -1. B ) = ( A . A -1 ). B = I . B = B , se observa fácilmente que el producto (A -1. B) es una solución que verifica dicho sistema.

Para demostrar que esta es la solución única, se supondrá que X0 es una solución arbitraria, entonces se verifica que A. X0 = B, al multiplicar ambos miembros por A -1, se obtiene:

A -1 (.A.X0) = A -1 .B

( A -1 A).X0) = A -1 .B

I . X0 = A -1.B

X0 = A -1.B

**Matriz escalonada por filas y escalonada reducida por filas**

Dada una matriz A de orden mxn, llamamos **pivote** de una fila (columna) al primer elemento, no nulo, si existe, de dicha fila (columna). La matriz A se dice que es **escalonada reducida por filas** si verifica las siguientes condiciones:

1. Si una fila no consta completamente de ceros, entonces el primer elemento diferente de cero en la fila es un pivote.
2. Si existen flas que consten completamente de ceros, entonces se agrupan en la parte inferior de la matriz.
3. Si dos filas sucesivas no constan completamente de ceros, el pivote de la fila inferior se presenta más hacia la derecha que el pivote de la fila superior.
4. Cada columna que contenga un pivote tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz verifica las condiciones 1, 2 y 3, se dice que está **escalonada por filas** o triangular superior.

**Método de Gauss - Jordan para determinar la inversa de una matriz**

Las operaciones elementales a las filas de una matriz dada consisten en:

* Multiplicar a una de las filas por una constante no nula.
* Intercambiar dos de las filas.
* Sumar algebraicamente, un múltiplo de una de las filas a otra.

Dada una matriz A cuadrada y la matriz Identidad I del mismo orden, el método de Gauss-Jordan permite obtener, si existe, su matriz inversa A-1.

Consiste en escribir la matriz ampliada [A / I ]

****

Luego se aplican las operaciones elementales en las filas para transformar la matriz A en la matriz I. La matriz B que resulta en el lugar de la identidad inicial, si existe, es la matriz inversa de A.

 [ I / B ]

****

Luego B = A−1 en caso de existir la matriz inversa. Si al realizar el proceso de transformación alguna de las filas de A se anula, llegaríamos a una incongruencia, y significaría que A no admite inversa.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 12, 13 y 14.*

**Determinantes**

Sea Mnxn el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n, se puede definir la función determinante dada por:

 d: Mnxn → IR

 A → det(A) = n

Es decir, dada una matriz cuadrada A, se puede obtener un único número “n” denominado **determinante de A** y anotado **det(A) = IAI = n**.

**Determinantes de orden 1, 2, 3, n**

Si A es una matriz de orden 1x1, es decir A= [a], su determinante será det (A) = a

Si A es una matriz de orden 2x2, es decir A= ****, su determinante será el número det (A)= a11.a22 - a21.a12

Si A es una matriz de orden 3x3, es decir A= ****, su determinante será el número

det (A) = a11a22a33 +a21a32a13 +a12a23a31 −a13a22a31 −a23a32a11 −a12a21a33

La fórmula anterior se conoce como “Regla de Sarrus”, es un método directo que sirve para calcular el determinante de matrices de orden 3. Consiste en repetir las dos primeras filas (o columnas) debajo (derecha) de la matriz dada, y realizar los productos de tres factores con los elementos de las diagonales determinadas:

 det (A) = **=** a11a22a33 +a21a32a13 +a12a23a31 −a13a22a31 −a23a32a11 −a12a21a33

Cuando una matriz es de orden superior a 4, encontrar su determinante es más complicado por la cantidad enorme de cálculos que se deben realizar. En el caso de una matriz de orden 4 para encontrar su determinante se deben realizar 24 productos, si la matriz es de orden 10 se necesitan 3628800 productos. Para estos casos se aplican diferentes métodos de cálculo, como la Regla de Laplace, la Regla de Chio, método de Gauss, etc.

En el caso de una matriz de orden n, es decir si A = , se consideran los productos de n elementos de A tal que uno y solo uno de los elementos proviene de cada fila y, uno y solo uno proviene de cada columna. Tal producto puede escribirse:

a1f1, a2f2, …, anfn

donde los factores proceden de filas sucesivas, de modo que los primeros subíndices mantienen el orden natural 1, 2, 3,…, n. Ahora, como los factores provienen de columnas diferentes, la sucesión de los segundos subíndices constituye una permutación de los subíndices j1j2…jn. de las filas. Recíprocamente, cada permutación de esos subíndices, determina un producto de la forma anterior. Así pues, la matriz A origina n! ( n factorial) productos semejantes.

El cálculo del determinante de la matriz A = (a ij), de orden n, se obtiene de la sumatoria de los n! productos precedentes, multiplicado cada uno por el signo de la permutación. Es decir,

det( A)= IAI= ****** a1f1, a2f2, …, anfn

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 15 y 16.*

**Evaluación de los determinantes por reducción en las filas o columnas**

Para calcular el determinante de una matriz A cuadrada de orden n, se necesita el concepto de **cofactor del elemento a i j** de una matriz.

Sea A = (a i j) una matriz cuadrada de orden n. Dado un par de índices (i, j), representamos por A i j a la matriz que resulta al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El cofactor del elemento a i j de A es el numero real dado por:

 **C i j = (−1) i+j |A i j|**

**Regla de Laplace**

El determinante de la matriz A = (a i j) se puede calcular mediante el desarrollo de Laplace por una fila cualquiera (o columna), de la siguiente forma:

* Si se elige la i-ésima fila, det (A) = a i1 C i1 + a i2 C i2.+..+a i n C i n =**
* Si se elige la j-ésima columna, det (A) = a1 j C1 j + a 2j C 2j.+..+a n j C n j =**
* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 17 y 18.*

**Regla de Chío**

El determinante de la matriz A = (a i j) de orden n, se puede calcular mediante la Regla de Chío que se basa en el desarrollo de Laplace, pero en este caso se debe eligir una fila o columna en la cual figure un elemento pivote de valor 1 y los demás elementos que sean nulos. Esto se consigue aplicando las operaciones elementales en las filas o columnas de la matriz dada.

Por ejemplo:

Sea A = **una matriz de orden 4, si se calcula su determinante por la tercer columna, y se elige como pivote al número 1 que se encuentra en la segunda fila, los demás valores se anulan aplicando las operaciones elementales, se obtiene la matriz B semejante a A

B=, luego su determinante resulta: det(A) = ( -1). ** = -286

**Evaluación de los determinantes por reducción escalonada en las filas o método de Gauss**

Para facilitar los cálculos del determinante de matrices de orden muy grande, existe la posibilidad de evaluar el determinante de una matriz reduciéndola a su forma escalonada en las filas.

Condiciones para aplicar el método de Gauss en el cálculo del determinante:

* Al intercambiar una columna o una fila, el determinante queda multiplicado por el signo negativo, para no alterar su valor.
* Al multiplicar una fila por un escalar de la forma 1/n, n≠0, el determinante queda multiplicado por ese valor n.
* Al multiplicar una fila por un escalar n no nulo, el determinante queda dividido por ese valor.
* La operación elemental de sumar a una fila el múltiplo de otra, no altera el valor del determinante.

Propiedad

Si A es una matriz triangular de orden n, entonces el determinante de A es el producto de los elementos de su diagonal principal, es decir, det(A) = a11.a22…..ann = **.**

El método de Gauss consiste en aplicar las operaciones elementales en las filas o columnas de la matriz para transformarla en una matriz triangular y aplicar el teorema anterior, pero no hay que olvidarse las condiciones que producen modificaciones en el resultado final, si no han sido bien aplicadas.

Teorema

***Si A es una matriz de orden n que contiene una fila de ceros, entonces det(A)=0.***

Demostración

Como cada producto elemental con signo tomado de A contiene un factor de cada fila de A, todo producto en este caso contendrá un cero de la fila nula. Ya que el det (A) es la suma de esos productos elementales con signos, luego det (A) = 0.

**Propiedades de los determinantes**

* El determinante de la matriz nula es cero.
* El determinante de la matriz identidad es uno.
* Dada una matriz A cuadrada de orden n, si A’ es la matriz que se obtiene de multiplicar por una constante K a una sola fila de A, entonces det(A’) = k det(A).
* Dada una matriz A cuadrada de orden n, si A’ es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces det(A’) = - det(A).
* Dada una matriz A cuadrada de orden n, si A’ es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces det(A’) = det(A)
* Dada una matriz A cuadrada de orden n que posee dos filas iguales, entonces det (A) = 0.
* El determinante de una matriz A coincide con el de su matriz transpuesta, es decir det (A) = det (At).
* Dada un matriz A cuadrada de orden n, y k un escalar real, se cumple que det( k.A) = kn.det (A)
* Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces det (A. B) = det ( A). det( B)
* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 19.*

Teorema

***Una matriz cuadrada A de orden n es inversible, si y solo si su determinante es no nulo.***

Demostración

Si A es inversible, entonces existe A-1 tal que A. A-1 = I, aplicando determinante en ambos lados de la igualdad, resulta: det ( A. A-1) = det ( I), como A y A -1 poseen el mismo orden, entonces det( A. A -1) = det ( A) . det (A-1), reemplazando resulta:

det (A. A-1) = det ( A) . det (A-1) = det ( I) = 1

luego det ( A ) ≠ 0

Si det (A) ≠ 0, se demostrara que A es semejante por filas a la matriz I, por consiguiente, A es inversible. Sea R la forma escalonada reducida en las filas de A, debido a que R se puede obtener a partir de A por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas, es posible encontrar las matrices elementales E1, E2,…, Ek tales que Ek…E2 .E1.A = R, o bien , A= E1-1E2-1…Ek-1R.

Recordar que las matrices elementales de tamaño n son aquellas que se obtienen de aplicar alguna de las operaciones elementales a la matriz identidad y son matrices inversibles.

Por tanto, det (A) = det( E1-1).det(E2-1)….det(Ek-1 ).det( R)

Ya que se supone det (A) ≠ 0, en base a esta ecuación se deduce que det (R) ≠ 0. Por consiguiente, R no tiene ninguna fila nula, de modo que R = I.

Corolario

***Si A es inversible, entonces ***

Demostración

 Ya que A. A-1 = I, det ( A. A-1) = det ( A) . det (A-1) = det ( I)= 1, como det (A) ≠ 0, resulta

******

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 21*

**Matriz adjunta**

Si A es una matriz cuadrada de orden n yC i j representa el cofactor del elemento a i j , entonces la matriz C = **** es la matriz de cofactores de A.

La transpuesta de esta matriz se denomina matriz adjunta de A y se anota Adj (A) ó adj (A), es decir: Adj( A ) = Ct =****

**Determinación de la inversa de una matriz a través de su adjunta**

Si A es una matriz cuadrada de orden n yC i j representa el cofactor del elemento a i j , entonces la matriz C = **** es la matriz de cofactores de A. La transpuesta de esta matriz

se denomina matriz adjunta de A y se anota Adj (A) ó adj (A).

Teorema

***Si A es una matriz inversible, entonces .***

Demostración

Se demuestra primero que **A. adj (A) = det ( A) . I**

Considere el producto A.adj(A)

**. = **

En la matriz A.adj(A) obtenida cuando los cofactores corresponden a las filas de la matriz A se trata del desarrollo del determinante de A según la fila (Laplace), que determinan la diagonal principal de esta matriz producto. En tanto, que si los cofactores corresponden a otra fila como marcan los elementos que no corresponden a la diagonal principal, resultan nulas esas sumatorias.

Se tiene que:

 A.adj( A) = 

Para demostrar que esa sumatorias son nulas, se considera la matriz A = ****, cuyo determinante según la fila h es det(A) =*.*

Si se realizan operaciones elementales entre las filas h y k de la matriz A, se obtiene la matriz A’ semejante a A.

A’ =**,** cuyo determinantesegún la fila h es det( A’) **=** **

Por propiedades de la sumatoria:

**= *+ *

Por propiedad de determinantes de matrices semejantes: det( A’) = det(A)

det( A’)= + = det(A) = 

Por lo tanto, para que se cumpla esa igualdad resulta que: = 0

Considerando que:

A. adj (A) = = det(A) .I

Resulta que: **A. adj (A) = det ( A) . I**

Como A es inversible, det(A) ≠ 0. Por consiguiente, es posible volver a escribir la ecuación anterior como





Al multiplicar por la izquierda a los dos miembros por A -1 resulta:

 **

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 22.*